בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים
JERUSALEM COLLEGE OF TECHNOLOGY

מכון לב

החוג למתמטיקה

מס' זהות: ________________________

בחינת סוף קורס

תשס"ז סמסטר א' מועד א'

שם הקורס: אנליזה מתמטית

מס' הקורס: ט"ז שבט תשס"ז - 04 בפבראור 07' ל"מ

שם המרצה: ד"ר נח דנא-פיקארד

תאריך הבחינה: 120511

משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: אסור (דף נוסחאות מצורף לשאלון) מחשבון לא ניתן לתכנות: מותר.

השאלון כולל **10** דפים, כולל דף זה.

בשאלון **6** תרגילים, ומתוכן על הנבחן לענות על 5 תרגילים .

לכל שאלה משקל זהה והוא: 20%.

יש לענות על השאלון עצמו. המחברת נתונה למטרת טיוטה <u>והיא לא תיבדק</u>.

<u>חשוב מאוד</u>: חובה לנמק את התשובות.

בהצלחה!

תלמיד/ה יקר/ה,

1. אם אינך מבין/ה את כוונת המרצה בשאלה כלשהי, עליך לכתוב בראש התשובה כיצד הינך מבין/ה את השאלה ולפתור בהתאם. לשיקול דעתו של המרצה אם יש מקום להבנה זו ואז ינקד בהתאם.
2. נוהל הבחינות של המכון מחייב אותך ובאחריותך להכירו. בחינה עלולה להיכשל על כל חריגה מהנוהל.

נא להקיף בעיגולים את מספרי התרגילים שהנך מבקש שייבדקו

תרגיל לא מסומן לא ייבדק

ציון	6	5	4	3	2	1

תרגיל מס' 1

שתי השאלות בלתי תלויים זו בזו

א. נתון $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$. הוכח ש- u היא פונקציה הרמונית על $\mathbf{R}^2$ ומצא את הצמוד הרמוני שלה.

ב. נתון $f(z)=e^{\mathrm{Re}(z)}$. הוכח שהפונקציה איננה גזירה בשום נקודה של $\mathbf{C}$.

פתרון :

כאן החישובים נעשו בעזרת תוכנת Derive.

#1: $2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2$

#2: $\frac{d}{dx}(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)$

#3: $-3\cdot x^2+3\cdot y^2+2$

#4: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)$

#5: $-6\cdot x$

#6: $\frac{d}{dy}(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)$

#7: $6\cdot x\cdot y$

#8: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)$

#9: $6\cdot x$

#10: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)+\left(\frac{d}{dy}\right)^2(2\cdot x-x^3+3\cdot x\cdot y^2)$

#11: 0

לכן הפונקציה u היא פונקציה הרמונית על $\mathbf{R}^2$. מזה נובע שהיא יכולה להיות החלק הממשי של פונקציה $f=u+iv$ אנליטית על $\mathbf{C}$.

כיון ש- f אנליטית על $\mathbf{C}$, היא גזירה בכל מקום. לכן משוואות Cauchy-Riemann מתקיימות בכל נקודה של $\mathbf{R}^2$.

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y=-3x^2+3y^2+2 \\ v_x=-6xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(x,y)=\int\left(-3x^2+3y^2+2\right)dy=-3x^2y+y^3+2y+C_1(x) \\ v(x,y)=\int -6xy\,dx=-3x^2y+C_2(y) \end{cases}$$

מכאן ש- $v(x,y)=-3x^2y+y^2+2y+C, C\in\mathrm{R}$.

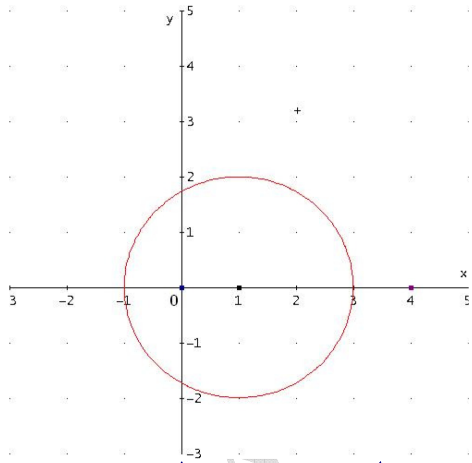
ב. נסמן $z=x+iy$ כאשר x,y ממשיים. אזי $f(z)=e^x=e^x+0i$. עם הסימון המסורתי $\begin{cases} u(x,y)=e^x \\ v(x,y)=0 \end{cases}$.

משוואות Cauchy-Riemann מתקיימות אם"ם $\begin{cases} e^x=0 \\ 0=0 \end{cases}$, דהיינו הן לא מתקיימות בשום נקודה של המישור.

לכן הפונקציה f לא גזירה בשום מקום והיא לא אנליטית בשום מקום.

תרגיל מס' 2

חשב את האינטגרל הבא: $I=\oint_{|z-1|=2}\frac{e^z}{z^2(z-4)(z-1)}dz$



אפשר לפתור את התרגיל בשתי דרכים. נבחר להשתמש במשפט הרזידואים. לפונקציה הנתונה שלוש נקודות סינגולריות: 0, 1 ו- 4 (יש להוכיח את זה). הנקודה 4 נמצאת מחוץ לעקומת ג'ורדן הנתונה, לכן אין לנו צורך ברזידו של הפונקציה ב-4. אנו מחשבים את הרזידואים של f ב-0 (קוטב מסדר 2) וב-1 (קוטב מסדר 1).

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\left(z\,f(z)\right)\right)=\frac{9}{16};\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=-\frac{1}{3}e$$

לכן $I=2i\pi\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{3}e\right)$.

הדרך השנייה: להעביר "גשר" בתוך המעגל ולהשתמש פעם בנוסחת האינטגרל של קושי (עבור הלולאה מסביב ל-1) ופעם בהכללה של נוסחת האינטגרל של קושי (עבור הלולאה מסביב ל-0).

תרגיל מס' 3
שני החלקים בלתי תלויים זה בזה

חלק ראשון:

א. נסח והוכח את משפט ליוביל.

ב. נתונה פונקציה שלמה f כך שלכל מספר מרוכב z מתקיים: $|f(z)|\geq 1$. הוכח ש- f היא פונקציה קבועה (רמז: השתמש בפונקציה $\frac{1}{f}$).

חלק שני:

חשב את האינטגרל הבא: $I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+4\sin t}$.

פתרון:

חלק ראשון:

א. בספר או במחברת. (6 נקודות)

ב. (5 נקודות) כיון שלכל $z\in \mathbf{C}$, מתקיים $|f(z)|\geq 1$, הפונקציה f לא מתאפסת.

לכן הפונקציה $\frac{1}{f}$ מוגדרת על $\mathbf{C}$ כולו, ואפשר להוכיח שהיא פונקציה שלמה.

בנוסף מתקיים $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leq 1 \Leftrightarrow |f(z)|\geq 1$.

הוכחנו ש $\frac{1}{f}$ היא פונקציה שלמה וחסומה. עפ"י משפט ליוביל, $\frac{1}{f}$ היא פונקציה קבועה. מזנה נובע ש- f היא פונקציה קבועה.

חלק שני (9 נקודות)

מציבים $z=e^{it}, t\in[0,2\pi]$. אזי $dz=ie^{it}\,dt=iz\,dt$ ז"א $dt=\frac{dz}{iz}$. עפ"י נוסחת אוילר $\sin t=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

מכאן ש- $I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+4\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5i\,z-2}dz$.

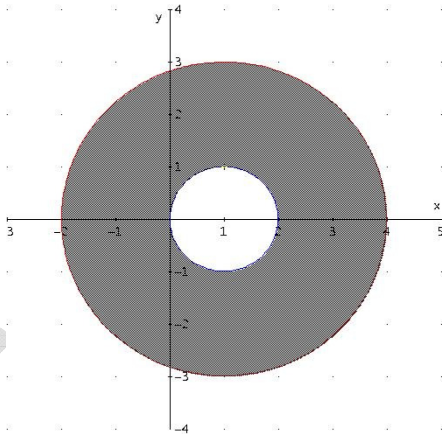
למכנה שני שרשים $-\frac{1}{2}i$ ו- $-2i$. רק הראשון נמצא בתוך מעגל היחידה. לכן צריכים לחשב את הרזידו של האינטגרנד (הפונקציה בתוך האינטגרל) רק בנקודה $-\frac{1}{2}i$. הרזידו הזה שווה ל- $-\frac{1}{3}i$ ובסוף מתקבל:

$I=2\pi i\left(-\frac{1}{3}i\right)=\frac{2\pi}{3}$.

תרגיל מס' 4

א. הפונקציה f נתונה ע"י $f(z)=\frac{z+2}{z^2-6z+8}$. כתוב טור לורן של $f(z)$ בחזקות של $z-1$ המתכנס בטבעת המכילה את המספר 3.
ב. האם הטור הזה שימושי כדי למצוא את הרזידו של $f(z)$ בנקודה 1 ?
ג. מה הרזידו של הפונקציה f בנקודה 0 ?

פתרון:
א.



תחום הקיום של הפונקציה: $\mathrm{C}-\{2,4\}$.

פירוק לשברים פשוטים: $\forall z\in C, f(z)=\frac{-2}{z-2}+\frac{3}{z-4}$. נפתח כל מחובר לטור לורן (בנפרד).
בשביל המחובר הראשון, צריכים תחום התכנסות חיצוני למעגל שמרכזו ב-1 ורדיוסו 1. בשביל המחובר השני צריכים תחום התכנסות פנימי למעגל שמרכזו ב-1 ורדיוסו 3.

$$\frac{3}{z-4}=\frac{3}{(z-1)-3}=\frac{-3}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n;\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$$

ונזכור ש- $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1\Leftrightarrow|z-1|<3$.

$$\frac{-2}{z-2}=\frac{-2}{(z-1)-1}=\frac{-2}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=-2(z-1)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n=-2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{-n-1};\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$$

ונזכור $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1\Leftrightarrow|z-1|>1$.

לכן על הטבעת המוגדרת ע"י $1<|z-1|<3$ מתקיים:

$$f(z)=-2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{-(n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$
$$=\ldots-2(z-1)^{-3}-2(z-1)^{-2}-2(z-1)^{-1}-1-\frac{1}{3}(z-1)-\frac{1}{3^2}(z-1)^2-\frac{1}{3^3}(z-1)^2-\ldots$$

ב. הטור הזה לא שימושי כדי לחשב את הרזידו של הפונקציה בנקודה 1, כיון שתחום ההתכנסות איננו כדור פתוח שמרכזו ב-1 (פרט ל-1).
ג. הפונקציה היא פונקציה רציונלית על $\mathrm{C}-\{2,4\}$, לכן היא אנליטית ב-0 והרזידו שלה ב-0 הוא 0.

תרגיל מס' 5

שני החלקים בלתי תלויים זה בזה

חלק ראשון: הפונקציה f נתונה ע"י $f(z)=\dfrac{\sinh z}{z(z-i)^3}$.

א. הוכח שיש לפונקציה הזאת קוטב בנקודה i. מה הסדר שלו?

ב. הוכח שיש ל- f נקודה סינגולרית ב- 0? מאיזה סוג?

חלק שני: בלי חישוב מדויק של האינטגרל הוכח ש- $\left|\oint_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^2-1}\right|\le\dfrac{3\pi}{4}$.

<u>פתרון:</u>

חלק ראשון:

הפונקציה f היא המנה של הסינוס ההיפרבולי בפונקציה פולינומיאלית. המונה והמכנה הם פונקציות גזירות על C כולו. לכן הפונקציה f גזירה בכל תחום הקיום שלה.

נובע מזה ש- f אנליטית בסביבה של 0 (למשל בכדור פתוח שמרכזו ב-0 ורדיוסו 1/2) אבל לא ב-0, כלומר, יש ל-f נקודה סינגולרית ב-0.

טענה דומה מתאימה לנקודה i.

א. $\lim\limits_{z\to 1}(z-i)^3 f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sinh z}{z}=\sinh 1$

ולכל $n>3$ טבעי, מתקיים $\lim\limits_{z\to 1}(z-i)^n f(z)=0$.

לכן יש לפונקציה f קוטב מסדר 3 בנקודה i.

ב. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sinh z}{z}=1\Rightarrow\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\dfrac{1}{(-i)^3}=i$ לכן יש ל- f נקודה סינגולרית סליקה ב-0.

חלק שני:

נשתמש במשפט ML.

- אורך המסילה הוא 6π.
- צריכים למצוא חסם מלעיל של $\left|\dfrac{1}{z^2-1}\right|$ על המעגל הנתון.

נסמן $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$. הערך המוחלט של $f(z)$ הוא מקסימלי כאשר $\left|z^2-1\right|$ מינימלי. נסמן $z=x+iy$ כאשר x,y ממשיים. וכן עבור הריבוע של הביטויים הנ"ל. נסמן:

$$g(x,y)=\left|z^2-1\right|^2=\left|x^2-y^2-1+i\cdot 2xy\right|^2=\left(x^2-y^2-1\right)^2+(2xy)^2=x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2+2y^2+1$$

עלינו למצוא את המינימום של $g(x,y)$ בכפוף לאילוץ $x^2+y^2=9$. משתמשים בכופלי לגרנג' ומוצאים שלפונקציה $|f|$ יש מקסימום על המעגל הנתון, והוא שווה ל- $\dfrac{1}{8}$. עפ"י משפט ML מתקבל:

$$\left|\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^2-1}\right|\le 6\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{3\pi}{4}$$

<u>תרגיל מס' 6</u>

שני החלקים בלתי תלויים זה בזה

חלק ראשון:

הוכח: אם הפונקציה f אנליטית בתחום D וכך ש- $|f|$ היא פונקציה קבועה על D, אזי הפונקציה f קבועה על D.

חלק שני: הוכח ש- $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=\frac{\pi}{6}$.

<u>פתרון:</u>

חלק ראשון:

נסמן $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ לפי המסורת האלגברית.

נתון: קיים מספר ממשי $k\geq 0$ כך ש- $\forall z\in \mathrm{C},|f(z)|=k$.

אם $k=0$, הפונקציה הנתונה היא פונקצית האפס וסיימנו.

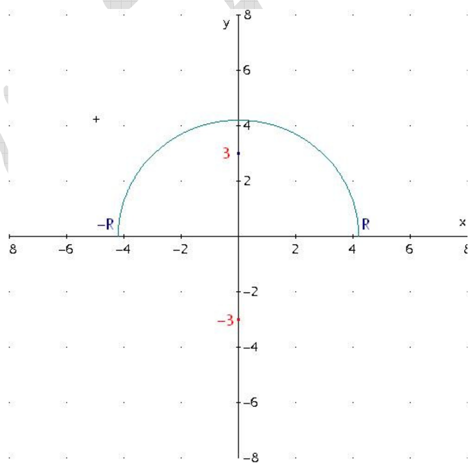
נניח ש- $k\neq 0$. עפ"י הנ"ל: $u^2+v^2=k^2$. מזה נובע ש-: $\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\2uu_y+2vv_y=0\end{cases}$ (*).

כיון ש- f היא פונקציה אנליטית על D, משוואות קושי-רומן מתקיימות בכל נקודה של D. ביחד עם (*) עלינו לפתור את מערכת המשוואות: $\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\2uu_y+2vv_y=0\\u_x-v_y=0\\u_y+v_x=0\end{cases}$. המטריצה של מערכת המשוואות ההומוגנית הזאת היא $\begin{pmatrix}u&0&v&0\\0&u&0&v\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$ והדטרמיננטה שלה שווה ל- u^2+v^2. זה נתון כשונה מ-0, לכן $u_x=v_y=0$ ונובע מזה ש- $u_y=v_x=0$ ומכאן ש- f היא פונקציה קבועה על D.

הערה: בשאלה היה נתון חסר: D צריך להיות קשיר. אחרת ההוכחה הנ"ל מוראה ש- f היא פונקציה קבועה על כל קומפוננט קשיר של D.

חלק שני:

נסמן $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)^2}$. לפונקציה הזאת שתי נקודות סיגולריות, אבל רק אחת בחצי המישור העליון, והיא $3i$. נבחר R>3 ממשי ונסמן ב- C_1 את חצי המעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו R. נסמן ב- C_R את האיחוד של C_1 עם הקטע [-R,R] על ציר ה-x. הלולאה C_R היא עקומת ג'ורדן ומתקיים:



$$2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),3i]=\oint_C\frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz=\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx+\int_{C_1}\frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz$$

כיון שהאינטגרנד הוא פונקציה רציונלית כך שמעלת המונה קטנה ממעלת המכנה ב-2, האינטגרל על C_1 שואף ל-0 כאשר R שואף ל- $+\infty$. בנוסף, $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx$ וזה שווה ל- $2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),3i]$.

נשאר לנו לחשב את הרזידו הזה. הוא שווה ל- $-\frac{1}{12}i$. לכן $I=2\pi i\left(-\frac{1}{12}i\right)=\frac{\pi}{6}$.

טורי מקלורין

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathrm{C}.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \forall z \in \mathrm{C}.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall z \in \mathrm{C}.$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \forall z \in \mathrm{C}.$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall z \in \mathrm{C}.$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} z, | z |< 1.$$

.

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, | z |< 1..$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots, | z |< 1$$

.