

פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 2

1. תאר בצורה אלגברית את תת-הקבוצות של המישור המרוכב הנתונות וקבע אם הן חסומות או לא.
 - א. אוסף הנקודות הנמצאות בתוך מעגל היחידה או מחוצה לו.
 - ב. אוסף הנקודות הנמצאות בטבעת שמרכזו בנקודה $P(1 + 2i)$. הרדיוס הפנימי הוא 2 והרדיוס החיצוני הוא 5.
 - ג. אוסף הנקודות בעלות שיעור y בין 1- ל-3 (ולא שווה למספרים האלה).
 2. נתונות תת-קבוצות של C . עבור כל אחת, קבע אם היא פתוחה, סגורה, לא פתוחה ולא סגורה, חסומה או לא:
 - א. $A = \{z \in C \mid \operatorname{Re}(z) < 2\}$
 - ב. $A = \{z \in C \mid |z - i| < 2\}$
 - ג. $A = \{z \in C \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$
 - ד. $A = \{z \in C \mid \operatorname{Im}(z) \geq |z|\}$
 - ה. $A = \left\{z \in C \mid \sin |z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$
 - ו. $h(z) = \sqrt{1 - |z|}$
 - ז. תחום הקיום של $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$
 - ח. תחום הקיום של $g(z) = \frac{z+1}{|z|}$
 - ט. תחום הקיום של $t(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$
 - י. תחום הקיום של $f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 2}$
 3. הכח או הפרך:
 - א. אם A ו- B הן שתי תת-קבוצות סגורות של C , אזי $A \cup B$ היא תת-קבוצות סגורה של C .
 - ב. אם A ו- B הן שתי תת-קבוצות סגורות של C , אזי $A \cap B$ היא תת-קבוצות סגורה של C .
 4. הוכח:
 - א. אם A ו- B הן שתי תת-קבוצות חסומות של C , אזי $A \cup B$ היא תת-קבוצה חסומה של C .
 - ב. אם A ו- B הן שתי תת-קבוצות חסומות של C , אזי $A \cap B$ היא תת-קבוצה חסומה של C .
 5. עבור כל קבוצה של תרגיל 1, קבע אם היא הקשירה או לא.
 6. נתונה קבוצה סופית $A = \{z_k \in C, k = 1, 2, \dots, n\}$ של מספרים מרוכבים. הוכח שהקבוצה המשלימה ל- A ב- C היא תת-קבוצה פתוחה של C .
 7. נתונה פונקציה f של המשתנה המרוכב z . כתוב אותה בצורה $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ כאשר $z = x + i y$,
 - א. $f(z) = z^2 + z$
 - ב. $f(z) = z^3$
 - ג. $f(z) = \frac{1}{z}$
 - ד. $f(z) = |z|$
 - ה. $f(z) = z |z|$
 - ו. $f(z) = |z| - z$
 - ז. $f(z) = z^2 + \bar{z}$
 - ח. $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$
 8. נתון $f(z)$ בצורה $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ כאשר $z = x + i y$, $z = x + i y$ ו- x, y ממשיים, $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ ממשיים.
 - א. $f(z) = y + i x$
 - ב. $f(z) = x^2 + i y^2$
 - ג. $f(z) = x^2 - y^2 + 2i x y$
 - ד. $f(z) = \frac{x - i y}{x^2 + y^2}$
 - ה. $f(z) = \frac{x^2 - y^2 - 2i x y}{(x^2 + y^2)^2}$
- שיעורי בית: ג1 – ג2 – ח2 – י2 – י3 – י4 – י7 – י8**