

פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 3

1. נתונה פונקציה f של המשתנה המרוכב z . כתוב את $f(z)$ בצורה $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ומצא את התחום שבו u, v מקיימות את משוואות קושי-רימן.

א. $f(z) = z^3$ ב. $f(z) = \frac{1}{z+1}$ ג. $f(z) = |z|$ ד. $f(z) = z|z|$

ה. $f(z) = z^2 - 2z^3$ ו. $f(z) = x^2 + iy^2$ ז. $f(z) = \bar{z}$ ח. $f(z) = (z^2 + \bar{z})$ ט. $f(z) = z^2 + \bar{z}$

2. נתונה פונקציה f של המשתנה המרוכב z .

- בדוק באילו נקודות הפונקציה גזירה.
- מהו תחום האנליטיות של הפונקציה f .

א. $f(z) = 1/z^2$ ב. $f(z) = \bar{z}$ ג. $f(z) = |z|^2$ ד. $f(z) = \cos y + i \sin y$

ה. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ו. $f(z) = \frac{z+1}{z}$ ז. $f(z) = \bar{z} z^3$ ח. $f(z) = y^2 + ix^2$ ט. $f(z) = z^2 + \bar{z}$

3. נתונה פונקציה ממשיית u של שני משתנים x, y .

- בדוק ש- u יכולה להיות החלק הממשי של פונקציה f של המשתנה המרוכב z .
- חשב את הצמוד ההרמוני v של u .

א. $u(x, y) = x^2 - y^2$ ב. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ג. $u(x, y) = e^x \sin y$

4. הוכח: א. נניח שהפונקציה f אנליטית בתחום D ושכל הערכים שלה ממשיים. אזי הפונקציה f קבועה.
א.1. א. נניח שהפונקציה f אנליטית בתחום D ושכל הערכים שלה מדומים טהורים. אזי הפונקציה f קבועה.

5. נניח שהפונקציה $f = u + iv$ אנליטית בתחום D . באלו תנאים $g = u - iv$ תהיה אנליטית ב- D ?

6. נניח ש- $f(z)$ ו- $f(\bar{z})$ מוגדרים באותו תחום D , $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ ו- $f(z)$ אנליטית ב- D .
הוכח ש- $f(\bar{z})$ לא יכולה להיות אנליטית ב- D אלא אם כן f היא פונקציה קבועה.

7. מצא את המספר k כך שהנוסחה $u(x, y) = \cos x [e^y + e^{ky}]$ תגדיר פונקציה הרמונית.

8. נתון $f(z) = z^3 = u(x, y) + iv(x, y)$ כאשר $z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$ ו- $u(x, y)$ ו- $v(x, y)$ ממשיים.

- א. מצא את העקומה במישור- xy המוגדרת ע"י $u = 1$.
- ב. מצא את העקומה במישור- xy המוגדרת ע"י $v = 1$.
- ג. מצא את נקודת החיתוך ברביע הראשון של העקומות שמצאת בשאלות הקודמות.
- ד. הוכח שהמשיקים לעקומות הנ"ל בנקודת החיתוך של שאלה ג' הם מאונכים.
(אפשר ואפילו מומלץ להשתמש בתוכנה כדי לשרטט את הגרפים).

שיעורי בית: 1ד – 1ו – 2ב – 2ג – 3ג – 5 – 8