

**פונקציות מרוכבות תשס"ט**  
**דף תרגיל מס' 5**

1. חשב את המספרים הבאים וכתוב אותם בצורה אלגברית:
- א.  $\text{Log } i$       ב.  $\text{Log}(-1 + i\sqrt{3})$       ג.  $e^{ie^i}$       ד.  $e^{i^{1/2}}$       ה.  $[\text{Log } i]^{\sin i}$   
 ו.  $3^{\sqrt{3}}$       ז.  $(1 + i \tan 2)^i$       ח.  $10^{\cosh(1+i)}$       ט.  $(\sin i)^{\text{Log}(\sin i)}$
2. השתמש בלוגריתמים כדי לפתור את המשוואות הבאות:
- א.  $e^z = e^{2-i}$       ב.  $e^{2z} = e^z$       ג.  $(e^z + 1)^2 = e^z$       ד.  $e^{e^z} = 1$
3. הוכח שאם  $\theta \in \mathbb{R}$ , אזי:
- א.  $e^{i\theta} \neq -1$  אם  $\text{Re}[\log(1 + e^{i\theta})] = \text{Log} \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right|$   
 ב.  $\text{Re}[\log(re^{i\theta} - 1)] = \frac{1}{2} \text{Log}(1 - 2r \cos \theta + r^2)$  אם  $r \geq 0$  ו-  $re^{i\theta} \neq 1$ .
4. מה שגוי בהוכחה הבאה?  
 $1^2 = (-1)^2$  לכן  $\log 1^2 = \log(-1)^2$ . מזה נובע ש-  $2 \log 1 = 2 \log(-1)$  ולכן  $\log 1 = \log(-1)$ .  
 כיון שערך אפשרי של  $\log 1$  הוא 0, מקבלים ש-  $\log(-1) = 0$ .
5. השאלה באנגלית:

This problem considers the relationship between  $\log(8i)^{1/3}$  and  $1/3 \log(8i)$ .

- a) Show that  $(1/3) \log(8i) = \text{Log } 2 + i(\pi/6 + (2/3)k\pi)$ , where  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- b) Show that  $\log(8i)^{1/3} = \text{Log } 2 + i(\pi/6 + (2/3)m\pi + 2n\pi)$ , where  $m = 0, 1, 2$  and  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Thus there are three distinct sets (corresponding to  $m = 0, 1, 2$ ) of values of  $\log(8i)^{1/3}$ . Each set has an infinity of members.
- c) Show that the set of possible values of  $\log(8i)^{1/3}$  is identical to the set of possible values of  $(1/3) \log(8i)$ . This discussion can be generalized to apply to  $(1/p) \log z$  (where  $p$  is an integer) and  $\log(z^{1/p})$ .

6. א. בענף שבו  $\log(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{9i\pi}{4}$  חשב את  $\log(-1+i\sqrt{3})$  ואת  $\log(-1-i\sqrt{3})$ .

ב. בענף שבו  $(-2)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$  חשב את  $(-4)^{1/3}$ . כמה ערכים אחרים של  $(-4)^{1/3}$ ?

7. משתמשים בעלה הראשי של הפונקציה. חשב:

א. כאשר  $f'(z) = z^{1/4}$       ב. כאשר  $f'(z) = z^{7/6}$       כאשר  $f'(z) = z^{7/6}$

8. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\sinh w = i\sqrt{3}$       ב.  $\sinh(\cos w) = 0$       ג.  $\sin(\cos w) = 0$       ד.  $\tan z = \log i$

9. הוכח:

**המחלקה למתמטיקה**  
**Department of Mathematics**

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \text{ ג.} \quad \cosh^{-1} z = \log\left(z + (z^2 - 1)^{1/2}\right) \text{ ב.} \quad \sinh^{-1} z = \log\left(z + (z^2 + 1)^{1/2}\right) \text{ א.}$$

$$\frac{d}{dz}(\tanh^{-1} z) = \frac{1}{1-z^2} \text{ ו.} \quad \frac{d}{dz}(\cosh^{-1} z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} \text{ ה.} \quad \frac{d}{dz}(\sinh^{-1} z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^{1/2}} \text{ ד.}$$

$$10. \text{ א. הוכיח את הזהות: } \tanh^{-1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} \log\left(i \cot \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{ב. מצא זהות דומה עבור } \tan^{-1}(e^{i\theta})$$

שיעורי בית: 1ה - ז1 - ט1 - ד2 - 5 - ב7 - ג8 - ב9 - 9ה