



פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 6

1. חשב את האינטגרל $\int_0^{1+4i} z dz$ לאורך העקומה שמשוואתה היא $y = 4x^2$.

2. חשב את האינטגרל $\int_1^i \frac{1}{z} dz$ לאורך העקומה C הנתונה להלן:

- א. C היא קטע של קו ישר.
- ב. C היא קשת על הפרבולה שמשוואתה היא $y = (1-x)^2$.
- ג. C היא קשת של מעגל היחידה ברביע הראשון.

3. חשב את האינטגרלים $\int_{-1}^1 \frac{dz}{z}$:

- א. לאורך מעגל היחידה בחצי המישור העליון.
- ב. לאורך מעגל היחידה בחצי המישור התחתון.

4. נתון $I = \int_0^{2+i} e^{z^2} dz$ לאורך קטע של קו ישר. בלי לחשב את האינטגרל באופן מפורש הוכח ש- $|I| \leq \sqrt{5} e^3$.

5. נתון $I = \int_1^i \frac{dz}{z^{\frac{5}{4}}}$ לאורך קטע של קו ישר. בלי לחשב את האינטגרל באופן מפורש הוכח ש- $|I| \leq 4\sqrt{2}$.

6. שתי המסילות השונות C_1 ו- C_2 מקשרות את הנקודה $-1-i$ לנקודה $2+i$ במישור המרוכב. בדוק

האם $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ כאשר: א. $f(z) = ze^z$ ב. $f(z) = z + \bar{z}^{-2}$ ג. $f(z) = \sin z$ ד. $f(z) = \frac{1}{z^2}$

7. האם אפשר להשתמש במשפט Cauchy-Goursat כדי לחשב את האינטגרל הנתון?

א. $\oint_{|z-3i|=1} \frac{\cos z}{z+2} dz$ ב. $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{2z+1} dz$ ג. $\oint_{|z|=x} \frac{dz}{1+e^z}$ ד. $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{1-e^z}$ ה. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2-2z+2}$

8. בשאלות האלה, הלואה C היא הריבוע שקודקודיו הם התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים $3+3i, -3+3i, -3-3i, 3-3i$. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_C \frac{dz}{z-1+i}$ ב. $\oint_C \frac{\sin z dz}{(z-1-i)^4}$ ג. $\oint_C \frac{dz}{z^2+2}$ ד. $\oint_C \frac{e^z dz}{z^2-2z+1+2i}$

9. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_{|z-2i|=2} \frac{\sinh z}{z^2+z+1} dz$ ב. $\oint_{|z-1-i|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(\sinh z)}{z^2-z+1} dz$ ג. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos 2z}{z^{14}} dz$

ד. $\oint_C \frac{\cos z + \sin z}{(z^2+9)(z+1)} dz$ כאשר $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

ה. $\oint_C \frac{dz}{e^z(z^2-1)}$ כאשר C הוא הריבוע שקודקודיו הם התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים $2i, -2, -2i, 2$.

ו. $\oint_C \frac{dz}{e^z(z^2-1)^2}$ כאשר C הוא הריבוע שקודקודיו הם התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים $2i, -2, -2i, 2$.