



בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים (ע"ר)
 JERUSALEM COLLEGE OF TECHNOLOGY

פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 7

1. נסמן ב-C את מעגל היחידה במישור המרוכב וב-D את הריבוע שקודקודיו הם בעלי הקואורדינטות המרוכבות $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$. נתון $f(z) = ze^z$.
 - א. הוכח ש- $\oint_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz$.
 - ב. האם אותו שוויון קיים כאשר $f(z) = \cosh \frac{1}{z}$?
2. הוכח שהאינטגרל הנתון איננו תלוי במסילה המקשרת את הקצוות וחשב את האינטגרל.
 - א. $I = \int_{1+i}^{4+2i} e^{2z} dz$
 - ב. $I = \int_{1+i}^{4+2i} e^z \sinh(e^z) dz$
3. נתון אינטגרל $I = \int_{1+i}^{9+3i} z^{-2} dz$ לאורך העקומה הנתונה ע"י המשוואה $y = \sqrt{x}$.
 - א. חשב את האינטגרל.
 - ב. האם האינטגרל הזה תלוי במסילה?
 - ג. האם זה מתאים למפשט ידוע על דפורמצית מסילה?
4. נתון $I = \int_1^i z^{1/2} dz$ על מסילה שאיננה עוברת דרך נקודה המקיימת את התנאים $y = 0$ ו- $x \leq 0$. חשב את האינטגרל.
5. חשב את $I = \int_{1+i}^{-1-i} \frac{\text{Log } z}{z} dz$ כאשר המסילה לא חותכת את החתך עבור Log .
6. חשב את האינטגרלים הבאים:
 - א. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$
 - ב. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \cos t}$
 - ג. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2 \sin t}$
 - ד. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin t dt}{2 + \sin t}$
7. חשב את האינטגרלים הבאים:
 - א. $I = \oint_{|z|=2} \frac{\sinh z dz}{(z-1)^2}$
 - ב. $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - (1+3i)z + 3i}$
 - ג. $I = \oint_{|z-1|=4} \frac{e dz}{(z^2 + 4)^2}$
 - ד. $I = \oint_{|z-1|=4} \frac{dz}{z^3 (z^2 + 1)}$
8. השתמש בנוסחת הממוצע של גאוס כדי לחשב את האינטגרלים הבאים:
 - א. $I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$
 - ב. $I = \int_0^{2\pi} \cos(\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$
 - ג. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos \theta) \cosh(\sin \theta) d\theta$
9. הוכח שלערך המוחלט של הפונקציה הנתונה יש מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט בתחום D הנתון. אם אפשר מצא את המקסימום ואת המינימום.
 - א. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $f(z) = z^2$
 - ב. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1\}$, $f(z) = z^2$
 - ג. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $f(z) = e^z$
 - ד. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $f(z) = \cosh z$
 - ה. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$, $f(z) = e^z$
10. הוכח שהפונקציה f המוגדרת להלן איננה חסומה:
 - א. $f(z) = \cos z$
 - ב. $f(z) = \sin(1 + e^{2z})$
 - ג. $f(z) = e^{\sin z} \cos z$

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

11. נתון $f(z) = \sqrt{1+|z|}$.

- א. מצא את תחום הקיום של הפונקציה הזאת.
 ב. האם f חסומה על תחומה?
 ג. האם התוצאה הנייל קשורה למשפט ליוביל?

12. נניח ש- f היא פונקציה שלמה ושקיים מספר ממשי חיובי M כך ש-לכל $z \in C$ מתקיים $\operatorname{Re} f(z) \leq M$. הוכח ש- f היא פונקציה קבועה (רמז: השתמש במשפט ליוביל עבור e^f).

שיעורי בית: 1ב – 4 – 6ג – 7ד – 8ב – 9ב – 10ג – 12