

פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 8

1. חשב את שלושת האיברים הראשונים של הפיתוח של $f(z)$ לטור טיילור סביב הנקודה z_0 הנתונה:
 - א. $f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = 1 - i$
 - ב. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}, z_0 = i$
 - ג. $f(z) = \sinh z - \sin z, z_0 = 0$
 - ד. $f(z) = e^z, z_0 = i$
2. הסבר למה אין פיתוח לטור מקלורין עבור $z^{1/2}$.
3. בלי לחשב בצורה מפורשת את הטור טיילור, מצא את המרכז ואת הרדיוס של תחום ההתכנסות של הטור:
 - א. $\frac{1}{z^4 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$
 - ב. $\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1-i)^n$
 - ג. $\frac{1}{1 - \tan z}$ בפיתוח בסביבה של $1 + 2i$
4. השתמש בטור מקלורין של e^z על מנת להוכיח שבכדור הסגור המוגדר ע"י $|z| \leq 1$ מתקיים $|e^z - 1| \leq (e-1)|z|$.
5. השתמש בטור מקלורין של e^z ובטור מקלורין של $\sin z$ כדי לחשב שלושת האיברים הראשונים של טור מקלורין של $e^{\sin z}$.
6. פתור את התרגיל בשתי דרכים: השתמש בטור טיילור של $\frac{1}{z}$ סביב הנקודה 1 כדי לחשב טור טיילור של $\frac{1}{z^2}$ סביב אותה נקודה.
7. נתון $Si(z) = \int_0^z f(u) du$ כאשר $f(u) = \frac{\sin u}{u}$ אם $u \neq 0$ ו- $f(0) = 1$. השתמש בטורי מקלורים כדי לחשב טור מקלורין של $Si(z)$. (הפונקציה Si נקראת Sine Integral)
8. חשב טור מקלורין של
 - א. $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z-2)}$
 - ב. $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$
 - ג. $f(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}, z \neq 0$ - כך ש- $f(0) = 1$
9. חשב טור טיילור של $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$ בנקודה 2.
10. חשב טור לורן של $f(z)$ סביב הנקודה z_0 :
 - א. $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}, z_0 = 0$
 - ב. $f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}, z_0 = 0$
 - ג. $f(z) = ze^{1/(z-1)}, z_0 = 1$
11. חשב טור לורן של $f(z) = \frac{2}{(z+1)(z-2)}$ בחזקות של z המתכנס בטבעת.

