

פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 9

1. נתון $f(z) = \frac{2z - 8}{z^2 - 8z + 15}$

- א. מצא טור לורן של $f(z)$ המתכנס בטבעת המכילה את $3 + 3i$ (מרכז הטבעת ב-0).
 ב. האם אפשר להשתמש בטור הזה כדי לחשב את $\text{Res}[f(z), 0]$?
 ג. האם אפשר להשתמש בטור הנ"ל כדי לחשב את $\text{Res}[f(z), 3]$?

2. מצא את כל הנקודות הסינגולריות של הפונקציה הנתונה ומיין אותן לפי נקודה סינגולרית סליקה, קוטב (מאיזה סדר?) ונקודה סינגולרית מהותית:

א. $f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)}$ ב. $f(z) = z^2 e^{2/z}$ ג. $f(z) = \frac{z}{\sin z \cdot \cosh z}$ ד. $f(z) = e^{-z^2} \cosh \frac{1}{z}$
 ה. $f(z) = \frac{e^{2/z}}{(z-\pi)^3}$ ו. $f(z) = \frac{\sin z \cdot \tanh z}{z^4}$

3. מצא את כל הקטבים של הפונקציה הנתונה וציין את הסדר של כל קוטב.

א. $f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$ ב. $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^4 - 1)^3}$ ג. $f(z) = \frac{\sin z}{z^8 (z+i)^2}$ ד. $f(z) = \frac{1}{(e^z + 1)^5}$
 ה. $f(z) = \frac{1}{(1 - z^{1/2})^4}$ ו. $f(z) = \frac{1}{1 + z^{1/2}}$ ז. $f(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}$

4. נתון: לפונקציה f יש קוטב מסדר m ולפונקציה g יש קוטב מסדר n בנקודה z_0 . הוכח:
 א. ל- fg יש קוטב מסדר $m+n$ בנקודה z_0 .
 ב. אם $m \neq n$, יש ל- $f+g$ קוטב מסדר $\max(m, n)$.

5. השתמש ברזידואים כדי לחשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$ ב. $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$ ג. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}$ ד. $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 + 1}$
 ה. $\oint_{|z+1+i|=4} z^3 \cos \frac{1}{z} dz$ ו. $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z \sinh z} dz$ ז. $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^4} dz$ ח. $\oint_{|z-e|=1} \frac{1}{\text{Log } z - 1} dz$
 ט. $\oint_{|z|=3} \frac{e^{1/z}}{z^2} dz$ י. $\oint_{|z-1|=3} e^{2/z} \cosh z dz$

6. מצא את הרזידואים של $\tan z$ בכל אחת מן הנקודות הסינגולריות שלה.

שיעורי בית: 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30