



פונקציות מרוכבות תשס"ט
דף תרגיל מס' 11

1. מגדירים העתקה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ע"י $w = \left(\frac{-}{z}\right)^2$.
 - ב. הוכח שהטרנספורמציה הזאת שומרת על הזווית בין שני קטעים ישרים הנחתכים בנקודה $z \neq 0$ כלשהי.
 - ג. האם הטרנספורמציה f הנ"ל קונפורמית? למה?
(רמז: השתמש ב- $w = z^2$ תחילה)
 2. נתונים שני קרניים $L_1: y = ax$ ו- $L_2: y = bx$ כאשר $x > 0$. הטרנספורמציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ מוגדרת ע"י $w = u + iv = z^2$.
 - א. עבור $f(L_1)$ ו- $f(L_2)$ מצא משוואות מהצורה $v = g(u)$.
 - ב. אם הזווית בין L_1 ל- L_2 היא α , מה הזווית בין $f(L_1)$ ל- $f(L_2)$?
 3. אותו תרגיל עם $L_1: y = -x + 1$ ו- $L_2: y = x + 1$ כאשר $x \geq 0$. שרטט סקיצה של הקרניים ושל התמונות שלהן.
 4. נתון $w = e^z$.
 - א. הוכח שהתמונה של הפס D המוגדר ע"י $\begin{cases} x > 0 \\ -\pi/2 < y < \pi/2 \end{cases}$ היא החלק של המחצית הימנית של מישור- w הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
 - ב. נתון $\phi(z) = x + y$. הוכח ש- ϕ היא פונקציה הרמונית.
 - ג. איזו פונקציה הרמונית במישור- w מתקבלת מ- ϕ ?
-
5. מצא את הנקודות הקריטיות של הטרנספורמציות הנתונות להלן:
 - א. $w = z + \frac{1}{z}$
 - ב. $w = \sinh z$
 - ג. $w = e^{\sin z}$
 - ד. $w = \frac{z-i}{z+i}$
 ה. $w = \text{Log}(ez) - 2z$
 6. א. מהי התמונה של הקשת $C: |z| = 1, 0 \leq \arg(z) \leq \pi$ בטרנספורמציה הנתונה ע"י $w = z + \frac{1}{z}$?
 רמז: השתמש ב- $z = e^{i\theta}$.
 - ב. מהי התמונה של הקרן $L: y = 0, x \geq 1$ באותה טרנספורמציה?
 - ג. האם הזווית בין התמונות שמצאת בשאלות הקודמות שווה לזווית בין העקומות המקוריות? הסבר מה קרה.
 7. נתונה טרנספורמציה ע"י $w = \frac{1}{z}$. הוכח התמונה במישור- w של הקרן $L: \text{Im } z = 1$ היא מעגל. מה המרכז ומה הרדיוס שלו?
 8. עם הטרנספורמציה של תרגיל 7. מצא את התמונה של הישר $L: x + y - 1 = 0$. איזה סוג עקומה מצאת?