טרנספורמציות קונפורמיות
Conformal mappings

פרופ' נח דנא–פיקארד
טבת תשס"ט

מנקודות במישור-z אל נקודות במישור-w

- השאלה: למה נקודות, תחומים, עקומות במישור-z נהפכות במישור-w?
- המסגרת: פונקציות אנליטיות

תכונה מבוקשת:
שמירה על משוואת לפלס

תהי Φ פונקציה הרמונית בתחום D במישור-(x,y).

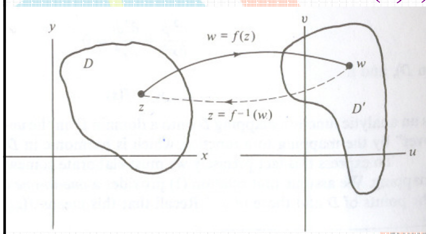
נתון "שינוי הקואורדינטות" $w=f(z)$ מ-(x,y) ל-(u,v),

נניח ש: א. f היא פונקציה אנליטית חח"ע ב-D

ב. f' לא מתאפסת ב-D.

ג. $D'=f(D)$.

אזי Φ הופכת לפונקציה הרמונית במישור-(u,v).

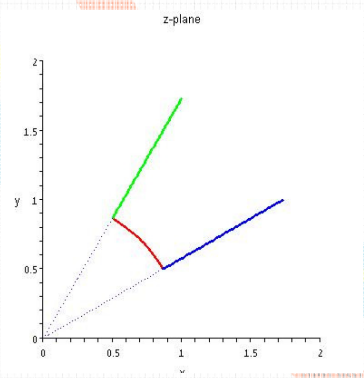


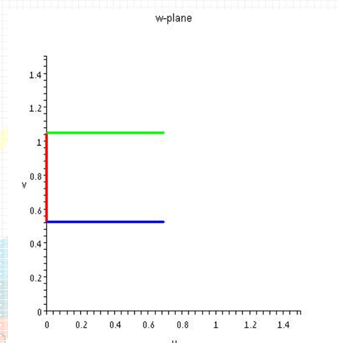
נ.ב. ב' הוא תוצאה של א'.

התכונה הקונפורמית – דוגמא ראשונה

הפונקציה: $w = \text{Log}\, z$

- על הקשת המוגדרת ע"י $|z|=1, \frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$
- על קטעים ישרים המוגדרים ע"י $\arg z = \frac{\pi}{6}, 1 \le |z| \le 2$ ו- $\arg z = \frac{\pi}{3}, 1 \le |z| \le 2$





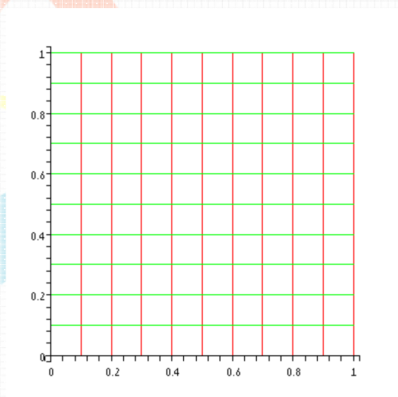
הגדרה

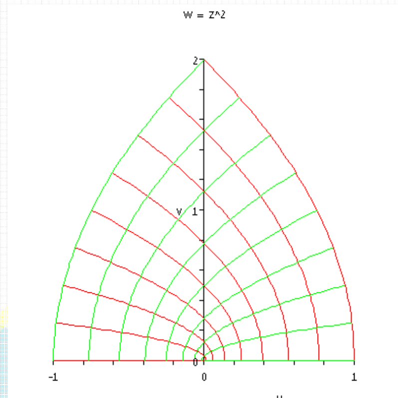
נתונה העתקה f ע"י $w=f(z)$.

אם f שומרת על הזווית (המכוונת) בין כל זוג עקומות העוברות דרך z_0, אומרים ש- f היא **טרנספורמציה קונפורמית** ב- z_0.

אם f קונפורמית בכל נקודה של התחום D, אומרים שהיא קונפורמית ב-D.

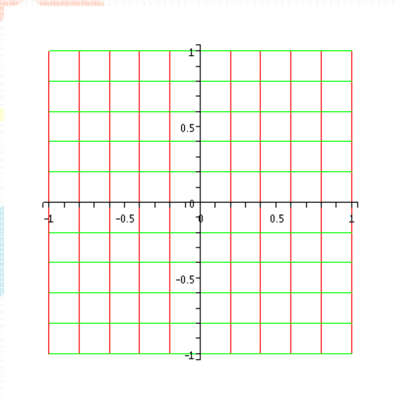
$f(z)=z^2$, $z=0..1+i$



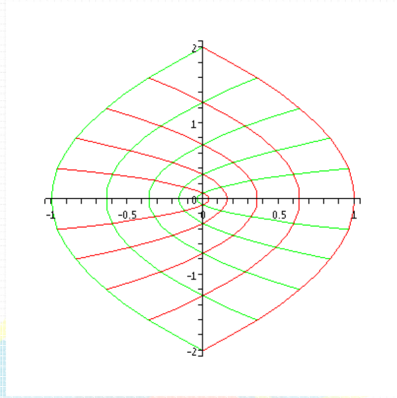


$f(z)=z^2$, z=-1-i..1+I

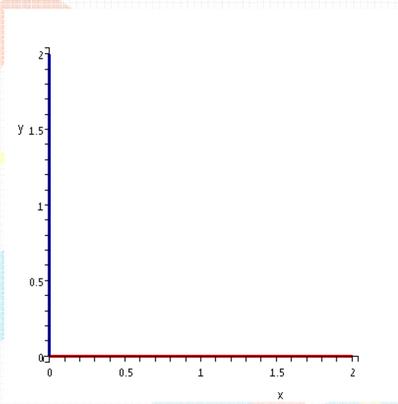
ישרים

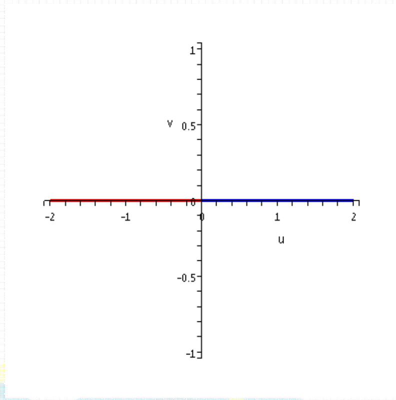


היפרבולות

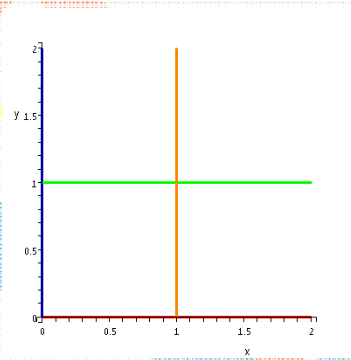


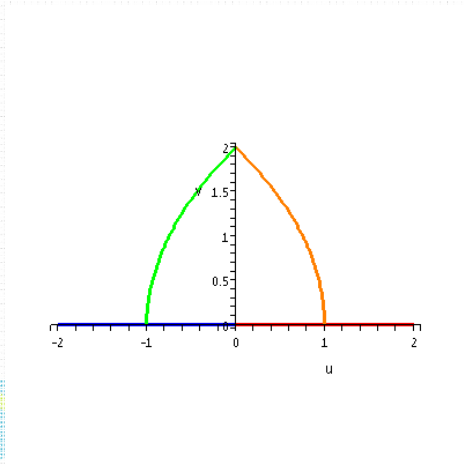
$f(z)=z^2,\ z_0=0$





$f\,(z)=z^2,\ z_0=1+i$





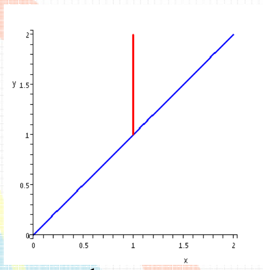
משפט

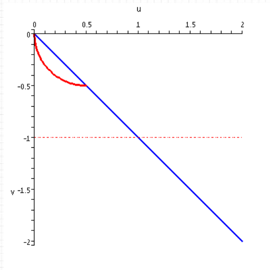
תהי f פונקציה אנליטית בתחום D.

הפונקציה הזאת קונפורמית בכל נקודה z_0 כך ש- $f\,'(z_0)\neq 0$.

נקודה z_0 כך ש- $f\,'(z_0)=0$ נקראת **נקודה קריטית**.

דוגמא

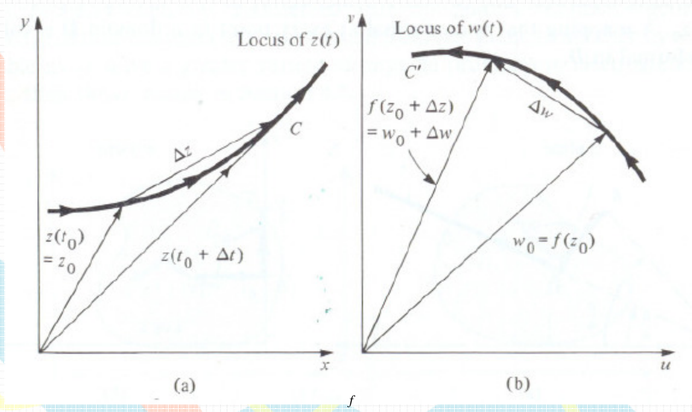




$$w=\frac{1}{z}$$
$$C_1: y=x, x>0$$
$$C_2: x=1, y\ge 1$$

$$C_1^{'}: v=-\sqrt{1-u^2}, 0<u\le 1$$
$$C_2^{'}: v=-u$$

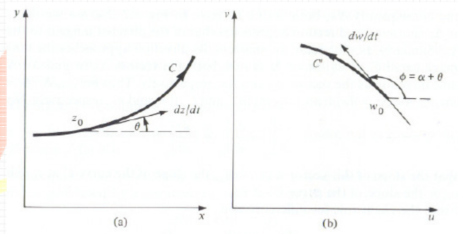
הוכחת המשפט (1)



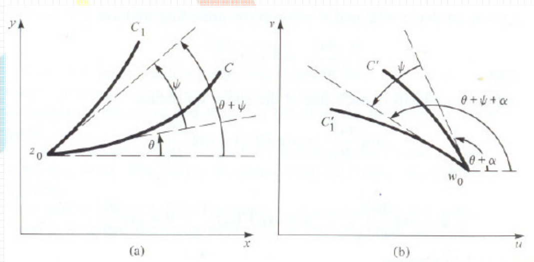
$$z\xrightarrow{f}w$$

הוכחת המשפט (2)

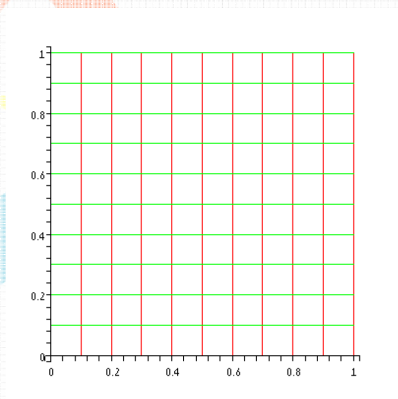
- סיבוב של עקומה

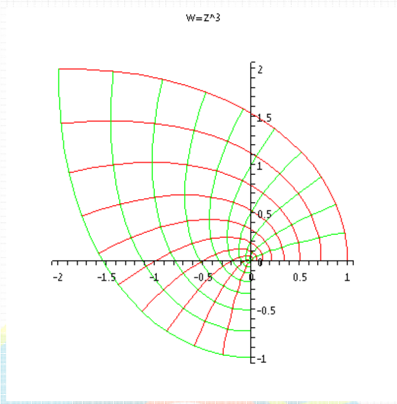


- הזוית בין שתי עקומות נשמרת



$f(z)=z^3$





$$f(z)=e^z$$