תרגיל מס' 1

הוכח על ידי שימוש בהגדרה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+4}=2$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ |\ n>N_0 \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+4}-2\right|<\varepsilon$$

$$\frac{2n+1}{n+4}-2=\frac{2n+1-2n-8}{n+4}=\frac{-7}{n+4}$$

$$\left|\frac{-7}{n+4}\right|=\frac{7}{n+4}$$

$$\frac{7}{n+4}<\varepsilon$$

$$7<\varepsilon n+4\varepsilon$$

$$7-4\varepsilon<\varepsilon n$$

$$\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon}<n$$

$$N_0=\left[\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon}\right]$$

תרגיל מס' 2

חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-2}-\sqrt{3x+2}}{x^2-2x}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{5x-2}-\sqrt{3x+2}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{8}=0$$

$$\lim_{x\to 2} x^2-2x=0$$

$$\frac{\sqrt{5x-2}-\sqrt{3x+2}}{x^2-2x}=\frac{\left(\sqrt{5x-2}-\sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{5x-2}+\sqrt{3x+2}\right)}{\left(\sqrt{5x+2}+\sqrt{3x+2}\right)(x-2)x}=\frac{(5x-2)-(3x+2)}{x(x-2)\left(\sqrt{\quad}+\sqrt{\quad}\right)}$$

$$=\frac{2x-4}{x(x-2)\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)}=\frac{2}{x\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\qquad\right)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 2\sqrt{8}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

תרגיל מס' 3

מצא את תחום הרציפות של הפונקציה f הנתונה ע"י $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}$.
בכל נקודת אי-רציפות, קבע מה הסוג שלה (קפיצה, סוג שני או אי-רציפות סליקה).

- f רציונלית $\Leftarrow$ f רציפה בכל נקודה של התחום שלה.
- $x^2-5x+4=0$ אם $x=1$ או $x=4$

$$D=\mathbb{R}-\{1,4\}$$

- $\forall x\in\mathbb{R}-\{1,4\},\ f(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2-4x+3)=0\\ \lim_{x\to 1}(x^2-5x+4)=0\end{aligned}\right|$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{2}{3}$$

ב-1 יש ל-f נק' אי-רציפות סליקה.

- $$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 4}(x^2-4x+3)=3\\ \lim_{x\to 4^<}(x^2-5x+4)=0^-\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4^<} f(x)=-\infty$$

ב-4 נק' אי-רציפות מסוג 2.

תרגיל מס' 4

הפונקציה f מוגדרת ע"י $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}$.

הוכח ש f גזירה על $\mathbb{R}$ ושהיא מקיימת את המשוואה הבאה:

$$f(x)=2\sqrt{x^2+4}\,f'(x)$$

תנאי קיום:
$$\begin{cases} x^2+4\geq 0 \\ x+\sqrt{x^2+4}\geq 0 \end{cases}$$

$$x^2+4 > x^2$$
$$\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{x^2+4} > |x|$$
$$x+\sqrt{x^2+4} > x+|x|$$

אם $x>0$, $x+|x|=2x$

$x+|x|>0$

אם $x\leq 0$, $x+|x|=0$

$\Leftarrow$ לכן $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+4}>0$

בנקודה זו , f הרכבה של פונקציות גזירות בכל תחום שבהן הן מוגדרות.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}}\cdot\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}\cdot\cancel{2}x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$f(x)=f'(x)\,2\sqrt{x^2+4}\,.$$