תרגיל 1

1.(א) הוכח ש $(1+x)^n = 1+nx+o(x)$ כאשר $x \to 0$.

(ב) חשב קירוב של $\sqrt[12]{1.175}$.

(א) ראו מחברת הקורס.

(ב) $\sqrt[12]{1.175} = (1+0.175)^{12} \approx 1+12\cdot 0.175$ ז״א $\sqrt[12]{1.175} \approx 3.1$

(ג) תרגיל 2

נתונה פונקציה f ע"י $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

מצא תחומי קמירות ותחומי קעירות של הפונקציה f הנתונה להלן וגם נקודות פיתול שלה.

הפונקציה f היא ההרכבה של הפונקציה המעריכית בבסיס e על פונקציה רציונלית. שתהין גזירות בתחום הגדרתן (בהתאמה). לכן הפונקציה f גזירה ב- $\mathbf{R}-\{-1\}$.

$$\forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty),\ f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}.$$

הפונקציה f' היא מכפלה של פונקציה רציונלית עם הפונקציה f הנ"ל. לכן היא גזירה על $\mathbf{R}-\{-1\}$. מתקיים:

$$\forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty),\ f''(x)=\frac{2x+3}{(x+1)^4}e^{\frac{1}{x+1}}.$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow 2x+3<0\Leftrightarrow x<-\frac{3}{2}$$

לכן הפונקציה f קעורה ב- $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ והיא קמורה ב- $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ וב- $(-1,+\infty)$.

הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודה $-\frac{3}{2}$ והסימן שלה משתנה שם. לכן $-\frac{3}{2}$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.

תרגיל 3

נתון $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$.

1. הוכח שהפונקציה f גזירה על $(0,+\infty)$ וחשב את $f'(x)$.
2. הוכח שלכל $x\in(0,+\infty)$, $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

1. פונקצית ה- arctan היא פוקנציה גזירה על R והפונקציה $x\mapsto\frac{1}{x}$ גזירה ב- $(0,+\infty)$. לכן הפונקציה $x\mapsto\arctan\frac{1}{x}$ היא הרכבה של שתי פונקציות גזירות וע״פ משפט על סכום פונקציות גזירות באותו תחום, הפונקציה f גזירה ב- $(0,+\infty)$.

$$\forall x\in(0,+\infty),\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}=0$$

2. כיון שהנגזרת הראשונה של הפונקציה f היא פונקצית האפס, הפונקציה f קבועה על $(0,+\infty)$. נחשב את ערכה בנקודה אחת: $f(1)=\arctan 1+\arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

לכן: $\forall x\in(0,+\infty),\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

3. תרגיל 4

חשב את האינטגרל $F(x)=\int x\arcsin x\,dx$.

פתרון ממוחשב (בעזרת Maple). בעבודה ידנית, ניתן לבצע מספר שלבים בבת אחת. מתחילים באינטגרציה בחלקים, אח"כ משתמשים בשיטת ההצבה מספר פעמים.
לא לשכוח את הקבוע הממשי C בסוף שורה 10 (אח"כ מדובר רק בהצבה בחזרה).

$$\int x\arcsin(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\int\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{2}\int\sin^2 u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2u)\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\,du-\frac{1}{2}\int-\frac{1}{2}\cos(2u)$$

$$du$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u-\frac{1}{2}\int-\frac{1}{2}\cos(2u)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\int\cos(2u)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\cos(u1)\,du1$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\int\cos(u1)\,du1$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\sin(u1)$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\sin(2u)$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)x^2-\frac{1}{4}\arcsin(x)+\frac{1}{4}x\sqrt{(1-x^2)}$$