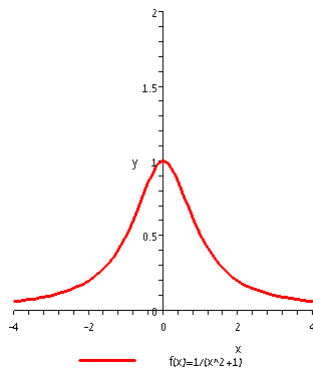


# פונקציות רציפות דוגמאות

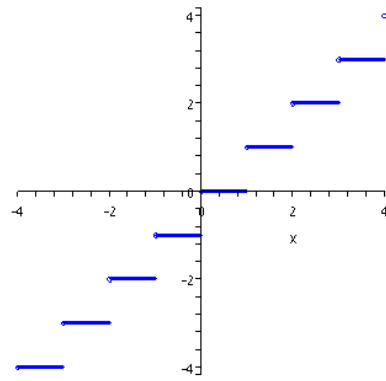
פרופ' נח דנא-פיקארד  
חשון תשס"ט

## פונקציה רציפה בנקודה אחת



- תהי  $f$  פונקציה מוגדרת בסביבה של הנקודה  $x_0$ . הפונקציה  $f$  רציפה בנקודה  $x_0$  אם:
  1. יש ל- $f$  גבול (סופי) ב- $x_0$ .
  2. הגבול הזה שווה ל- $f(x_0)$ .

## פונקצית החלק השלם: נקודות קפיצה



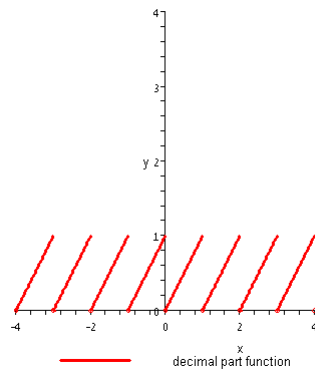
integer part function

- לכל מספר ממשי  $x$  קיים מספר שלם  $n$  יחיד כך ש-  $n \leq x < n+1$ .
- המספר  $n$  נקרא החלק השלם של  $x$ .
- סימון:  $[x] = n$

פרופ' נח דגא-פיקארד

3

## פונקצית החלק העשרוני: נקודות קפיצה



decimal part function

- לכל מספר ממשי  $x$ ,  $f(x) = x - [x]$

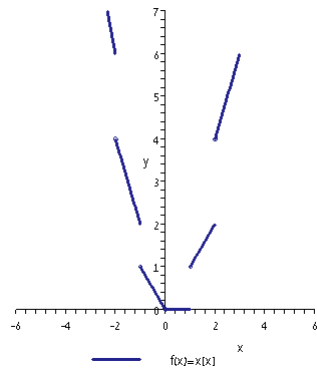
פרופ' נח דגא-פיקארד

4

## רציפות משמאל ורציפות מימין ב-0, נקודות קפיצה

■ לכל מספר ממשי  $x$ ,

$$f(x) = x[x]$$



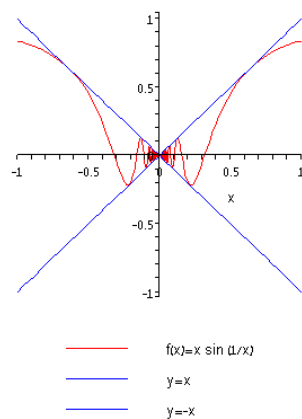
פרופ' נח דגא-פיקארד

5

## נקודת אי-רציפות סליקה ב-0

■ לכל מספר ממשי  $x$  שונה

$$f(x) = x \sin 1/x, 0$$

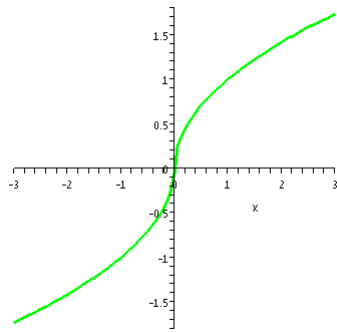


פרופ' נח דגא-פיקארד

6

## נקודת אי-רציפות סליקה

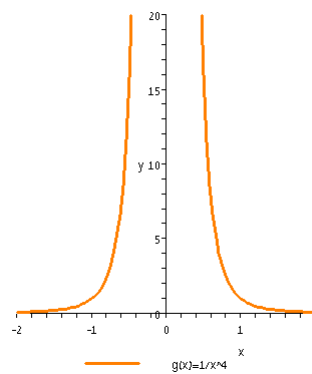
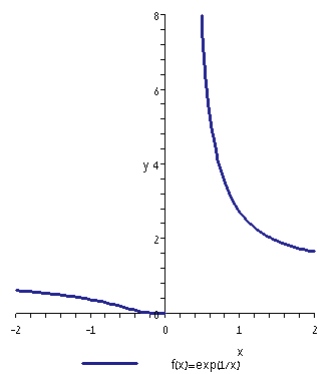
- לכל מספר ממשי  $x$  שונה מ-0,  
 $f(x) = (x/|x|)\sqrt{|x|}$



פרופ' נח דגא-פיקארד

7

## נקודת אי-רציפות מסוג שני

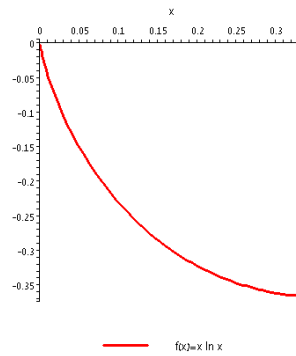
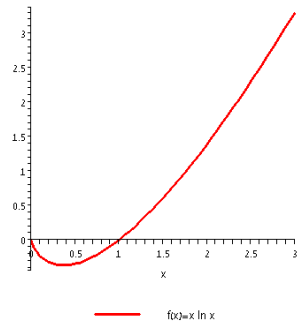


פרופ' נח דגא-פיקארד

8

## נקודת אי-רציפות מימין סליקה

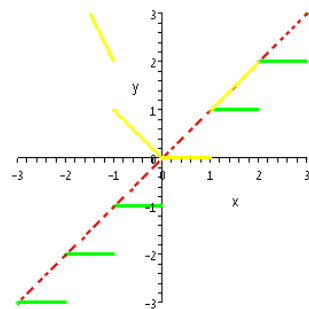
■ לכל מספר ממשי  $x$  גדול מ-0,  $f(x) = x \ln x$ .



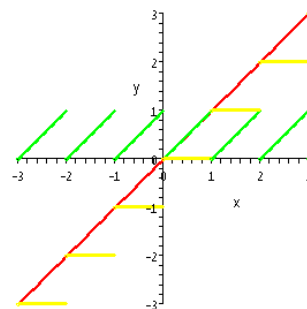
פרופ' נח דגא-פיקארד

9

## אלגברת הפונקציות הרציפות: המשפטים הם חד-סתריים



.....  $f(x)=[x]$   
.....  $g(x)=x$   
.....  $fg$

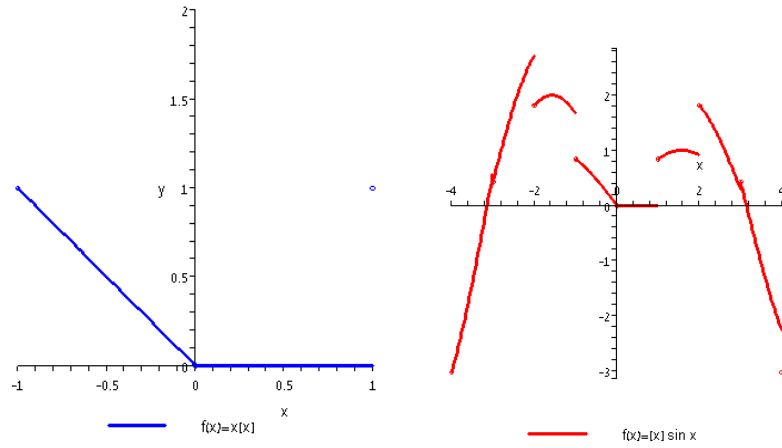


———  $f+g$   
———  $g(x)=x-[x]$   
———  $f(x)=[x]$

פרופ' נח דגא-פיקארד

10

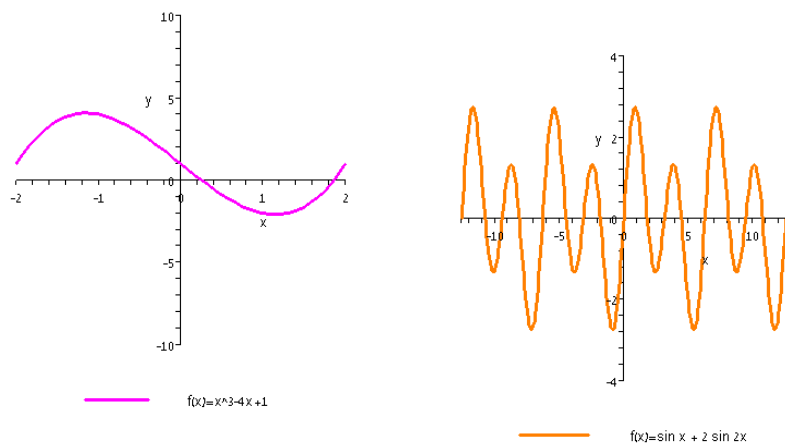
## רציפות על קטע



פרופ' נח דגא-פיקארד

11

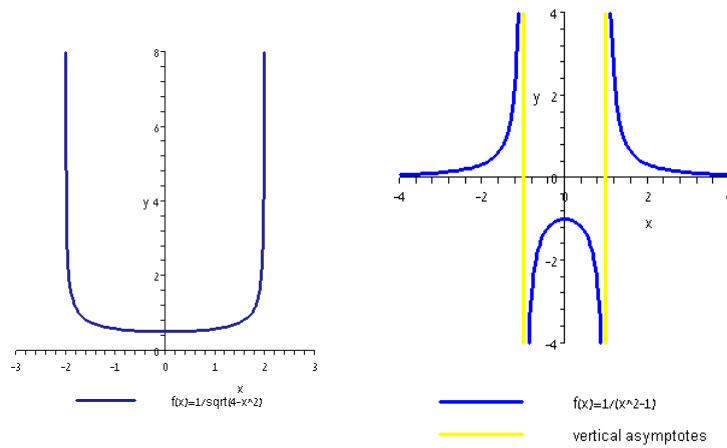
## פונקציה רציפה על קטע סגור



פרופ' נח דגא-פיקארד

12

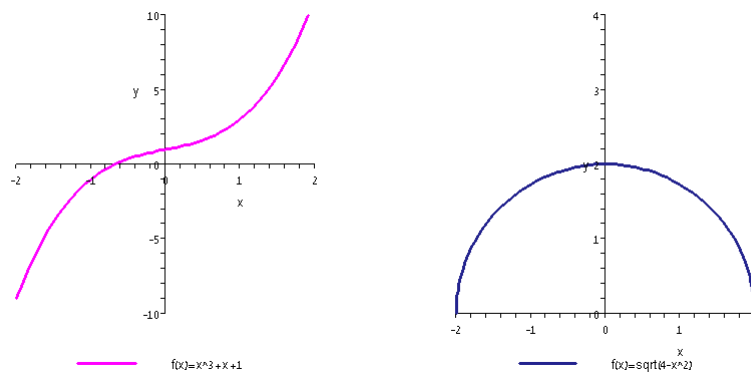
## פונקציה רציפה על קטע סגור: חשיבות ההנחות – רציפות הפונקציה וסגירות הקטע



פרופ' נח דגא-פיקארד

13

## נקודות קיצון בקצה הקטע

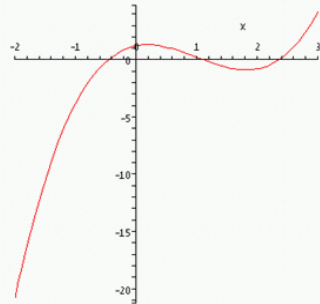


פרופ' נח דגא-פיקארד

14

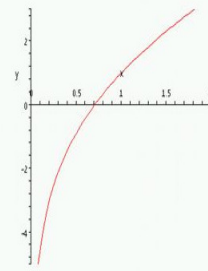
## משפט ערכי הבניים

```
> plot(x^3-3*x^2+x+1.25, x=-2..3);
```



```
> solve(x^3-3*x^2+x+1.25=0, x);  
-0.4729976011, 1.126000193, 2.346997409
```

```
> plot(x+2*ln(x), x=0..2, y=-5..3, legend=["solution of x+2ln  
x=0"]);
```



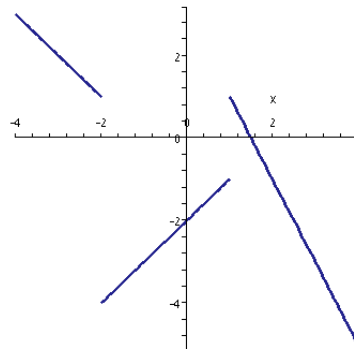
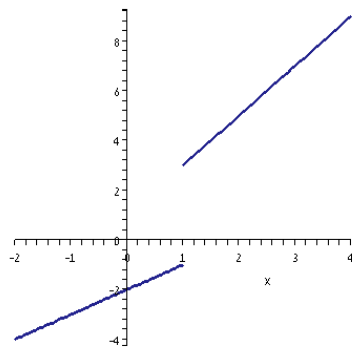
```
> solve(x+2*ln(x)=0, x);
```

2 LambertW( $\frac{1}{2}$ )

פרופ' נח דגן-פיקארד

15

## משפט ערכי הביניים לא ניתן ליישום



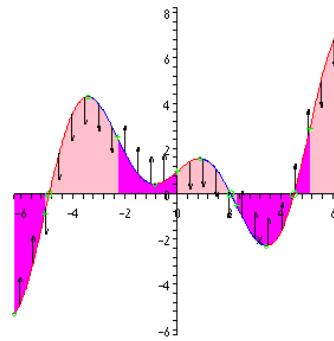
פרופ' נח דגן-פיקארד

16



## ספירת פתרונות של משוואה

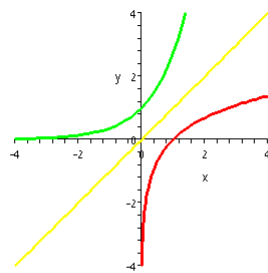
The Chart of  
 $f(x) = x^2 \cos(x) + 1$   
 on the Interval  $[-2\pi, 2\pi]$



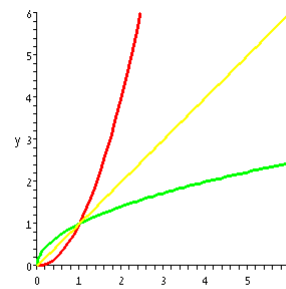
פרופ' נח דגא-פיקארד

17

## פונקציה הפיכה



- $f(x) = \ln x$
- $g(x) = e^x$
- axis of symmetry

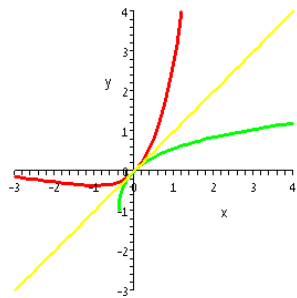


- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x^{1/2}$
- axis of symmetry

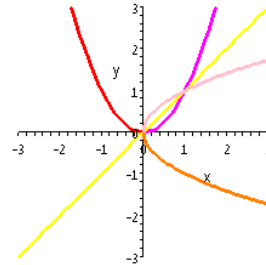
פרופ' נח דגא-פיקארד

18

## פונקציה הפיכה



- $f(x) = x \cdot e^x$
- $g(x) = \text{LambertW}(x)$
- axis of symmetry

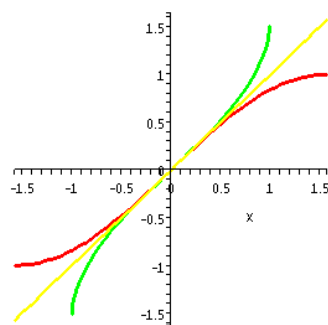


- $f(x) = x^2, x < 0$
- $h(x) = x^y, x > 0$
- axis of symmetry
- $g(x) = -\sqrt{x}, x > 0$
- $k(x) = \sqrt{x}, x > 0$

פרופ' נח דגא-פיקארד

19

## פונקציות טריגונומטריות הפוכות: arcsin



- sine
- arcsin
- axis of symmetry

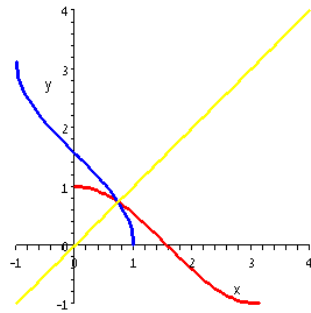
$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

פרופ' נח דגא-פיקארד

20

## פונקציות טריגונומטריות הפוכות: arccos

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$



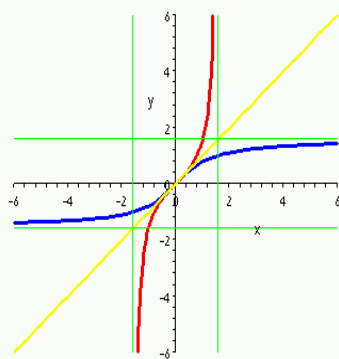
- cosine
- arccosine
- axis of symmetry

פרופ' נח דגא-פיקארד

21

## פונקציות טריגונומטריות הפוכות: arctan

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



- tangent
- arctangent
- axis of symmetry
- asymptote

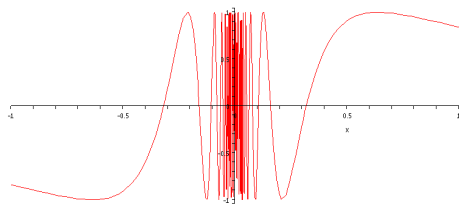
פרופ' נח דגא-פיקארד

22

## משפט Heine (תזכורת)

נתונה פונקציה  $f$  בסביבה (אולי מחוררת) של  $a$ . התכונות הבאות שקולות זו לזו:

1. ל- $f$  יש גבול / ב- $a$ , כלומר
2. לכל סדרה  $(x_n)$  המתכנסת ושואפת ל- $a$ , הסדרה  $(f(x_n))$  מתכנסת ושואפת ל- $l$ .



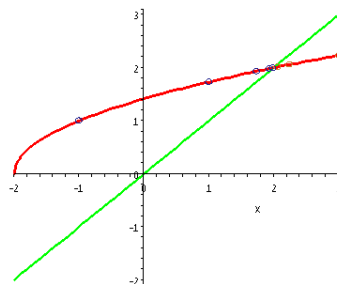
השימוש הנפוץ ביותר:  
להוכיח אי-קיום של גבול  
דוגמא: אם  $f(x) = \sin(1/x)$   
אזי אין ל- $f$  גבול ב- $0$ .

פרופ' נח דגא-פיקארד

23

## גבול של סדרה הנתונה ע"י כלל אינדוקציה

$$\begin{cases} a_0 = -1, 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



—  $y=x$   
—  $y=\sqrt{x+2}$   
○ 1st sequence  $a_0=3$   
○ 2nd sequence  $a_0=-1$

פרופ' נח דגא-פיקארד

24