


משפט רול

ע"ש Michel Rolle (1652-1719)

פונקציה מקביל לציר ה-x

נתונה פונקציה f מוגדרת על הקטע הסגור $[a, b]$ והמקיימת את התנאים הבאים:

- א. f רציפה על $[a, b]$
- ב. f גזירה על (a, b)
- ג. $f(a) = f(b)$

אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-
 $f'(c) = 0$

$y = \sqrt{x^2 - 4}$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

2

Rolle's Theorem

Rolle's Theorem Applied to $f(x) = x^2 - 2x + 2$ on the interval $[0, 2]$

Rolle's Theorem Applied to $f(x) = x^2 - 4x + 4$ on the interval $[-1, 4]$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

3

משפט רול לא עובד

$f = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -2 \\ 2 + 3x & -2 < x \end{cases}$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

משפט לגרנז' Joseph-Louis Lagrange 1736 – 1813

נתונה פונקציה f מוגדרת על הקטע הסגור $[a, b]$ והמקימת את התנאים הבאים:

- א. f רציפה על $[a, b]$
- ב. f גזירה על (a, b)

אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

משפט לגרנז' - דוגמא

#1: $3x^2 + 2x - 2$
 #2: $(-2) + (-2)^2$
 #3: -4
 #4: $a := [-2, -4]$
 #5: 2
 #6: $b := [1, 2]$
 #7: $[a, b]$
 #8: $\frac{d}{dx} (3x^2 + 2x - 2)$
 #9: $6x + 2$
 #10: $SOLVE(6x + 2 = 2, x)$
 #11: $x = \frac{2 - 2}{6} = \frac{0}{6} = 0$
 #12: $TANGENT(3x^2 + 2x - 2, x, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
 #13: $TANGENT(3x^2 + 2x - 2, x, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

משפט לגרנג' - גירסה שנייה

נתונה פונקציה f מוגדרת על הקטע הסגור $[a, b]$ והמקימת את התנאים הבאים:
 א. רציפה על $[a, b]$
 ב. גזירה על (a, b)
 אזי קיימת לפחות נקודה אחת $c \in (a, b)$ כך ש-

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (*)$$

• נסמן $a = x$ ו- $b = x + h$. ניתן לכתוב $c = a + \theta h$ כאשר $0 < \theta < 1$.
 המשוואה (*) נכתבת בצורה הבאה:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

השלכות של משפט לגרנג'

- **מסקנה 1:** נתונה פונקציה f גזירה בקטע I . אם לכל $x \in I$, $f'(x) = 0$ אזי f היא פונקציה קבועה על I .
- **מסקנה 2:** נתונות שתי פונקציות f ו- g גזירות בקטע I . נניח שלכל $x \in I$, $f'(x) = g'(x)$, אזי קיים $C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in I$, $f(x) = g(x) + C$.

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

עליה וירידה: משפט

תזי f פונקציה מוגדרת וגזירה על הקטע I .

1. אם לכל $x \in I$, $f'(x) = 0$, אזי הפונקציה f קבועה על I .
2. אם לכל $x \in I$, $f'(x) > 0$, אזי הפונקציה f עולה ממש על I .
3. אם לכל $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, אזי הפונקציה f עולה על I .
4. אם לכל $x \in I$, $f'(x) < 0$, אזי הפונקציה f יורדת ממש על I .
5. אם לכל $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, אזי הפונקציה f יורדת על I .

פרופ' נח ד-פ תשס"ט

פקודות Maple

```
> with(Student[Calculus1]);  
> RollesTheorem(x^4-4*x^3+x+1,-1..4);  
> RollesTheorem(x^3-3*x^2,0..3);  
> plot(1-abs(x),x=-2..2,y=-  
2..2,thickness=2,color=blue,legend=["f(x)=1-|x|"]);  
> f:=piecewise(x<=-2,x^2-1,x>-2,2+3*x);  
> plot(f,x=-  
3..2,color=blue,discont=true,thickness=2,color=coral);
```