הגדרה

- תהי f פונקציה מוגדרת בסביבה V של הנקודה x_0.
- נניח ש-f גזירה על V ונסמן ב-f' את הנגזרת הראשונה של f על V.
- אם f' גזירה בנקודה x_0, אומרים ש-f גזירה פעמיים ב-x_0 ומסמנים:

$$f''(x_0)=(f')'(x_0)$$

דוגמא 1

נתון $f(x)=x^2$. הפונקציה f מוגדרת וגזירה על R כולו.
לכל $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x$.
הפונקציה f' היא פונקציה פולינומיאלית, לכן היא גזירה על R.
מתקיים:
לכל $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=2$.

דוגמא 2

נתון $f(x)=\cos x$. הפונקציה f מוגדרת וגזירה על R כולו.

לכל $x\in R$, $f'(x)=-\sin x$.

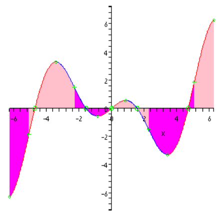
הפונקציה f' היא פונקציה גזירה על R.

מתקיים:

לכל $x\in R$, $f''(x)=-\cos x$.

קעירות וקמירות (תיאור א')

$f(x)=x\cos x$

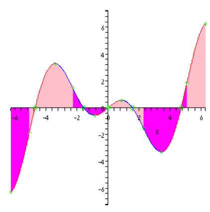


אם כל המיתרים מתחת לקשת של הגרף של f המתאימה לקטע I, אזי אומרים ש-f קעורה ב-I.

אם כל המיתרים מעל לקשת של הגרף של f המתאימה לקטע I, אזי אומרים ש-f קמורה ב-I.

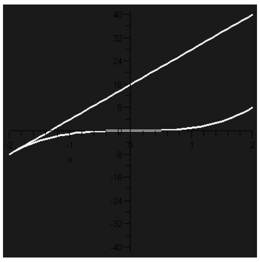
קעירות וקמירות (תיאור ב')

$f(x)=x\cos x$



- אם כל המשיקים מעל לקשת של הגרף של f המתאימה לקטע I, אזי אומרים ש-f קעורה ב-I.
- אם כל המשיקים מתחת לקשת של הגרף של f המתאימה לקטע I, אזי אומרים ש-f קמורה ב-I.

מיקום המשיק – 1



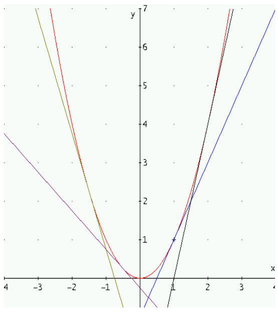
קעירות וקמירות

תהי f פונקציה גזירה פעמיים על הקטע I ב–**R**.

- אם $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$
  אזי הפונקציה f קמורה על I.

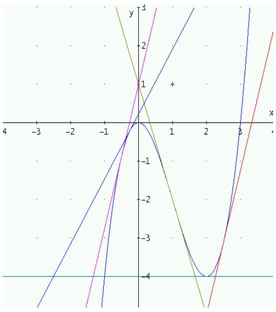
- אם $\forall x \in I,\ f''(x) < 0$
  הפונקציה f קעורה על I.

דוגמא 1



נתון $f(x)=x^2$.
הפונקציה f מוגדרת וגזירה על R כולו.
לכל $x\in R$, $f'(x)=2x$ ו- $f''(x)=2$.
לכן, לכל $x\in R$, $f''(x)>0$,
כלומר הפונקציה f קמורה על R.

דוגמא 2



נתון $f(x)=x^3-3x^2$.
הפונקציה f מוגדרת וגזירה על $\mathbf{R}$ כולו.
לכל $x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=3x^2-6x$
ו- $f''(x)=6x-6$.
לכן, לכל $x\in(-\infty,1)$, $f''(x)<0$,
ולכל $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)>0$.
כלומר הפונקציה f קעורה על $(-\infty,1)$
וקמורה על $(1,+\infty)$.

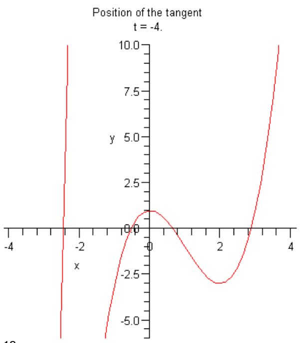
10 נגזרת שנייה

נקודת פיתול

1. נתונה פונקציה f בסביבה של המספר הממשי x_0 .
הנקודה הזאת נקראת נקודת פיתול של הפונקציה אם קעירות וקמירות מתחלפות בנקודה הזאת.
2. אם הפונקציה f גזירה לפחות פעמיים בסביבה של הנקודה x_0 , אזי הנקודה הזאת היא נקודת פיתול אם שני התנאים הבאים מתקיימים:
א. $f''(x_0)=0$
ב. בשני הצדדים של הנקודה, יש לנגזרת השנייה סימנים שונים .

11 נגזרת שנייה

מלמעלה למטה



$$f(x)=x^3-3x^2+1$$

12 נגזרת שנייה

עקמומיות

Definition 6.13.1 Let f be a function and P be a point on the graph of f. Denote by C the circle (if it exists) verifying the following properties:

(i) The circle C has the same tangent at P as the graph of f;

(ii) It lies on the same side of the tangent as the graph does;

This circle is called *the circle of curvature* of the graph at P. Its radius is called the radius of curvature at P, and its center is called *the center of curvature* at P.

עקמומיות

Proposition 6.13.2 *Suppose that f is differentiable at least twice at x_0 and denote by P the point whose coordinates are $(x_0, f(x_0))$. Then:*

1. The curvature κ at P is given by the formula

$$\kappa = \frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}};$$

2. The radius of curvature is given by

$$\rho = \frac{1}{\kappa}.$$

עקמומיות (3)

Example 6.13.3 Let $f(x) = x \ln x$, for $x > 0$. Let P be the point of intersection of the graph of f with the $x-$axis, i.e. $x_0 = 1$.

The function f is differentiable more tna twice over $(0, +\infty)$. We have:

$$\forall x \in (0, +\infty),\ f'(x) = 1 + \ln x,$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Thus, the curvature at P is equal to

$$\kappa = \frac{|-1|}{(1+1^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

The radius of curvature is equal to $2\sqrt{2}$. See Figure 17.

עקמומיות (4)

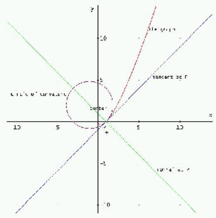


Figure 17: The circle of curvature at a point of a graph.

The tangent to the graph at P has equation $y = x - 1$, and the normal $\mathcal{L}$ at P has equation $y = -x + 1$. The center of curvature is the point A on $\mathcal{L}$ at a distance of $2\sqrt{2}$ from P and ``inside'' the curve; thus the coordinates of A are $(-1, 2)$.

16 נגזרת שנייה