סדרה מתכנסת

נתונה סדרה (a_n) של מספרים ממשיים.
אומרים שהסדרה הזאת מתכנסת אם קיים מספר ממשי l כך ש-

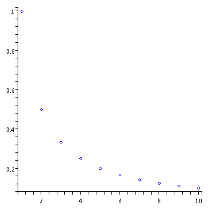
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbf{N} | n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

המספר הממשי l נקרא הגבול של הסדרה (a_n) ומסמנים:

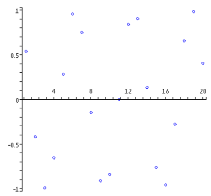
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

סדרה שאינה מתכנסת נקראת סדרה מתבדרת.

דוגמאות



$$a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$$



$$b_n = \cos n, n \geq 1$$

Maple commands

```
> with(plots):
>listplot([seq([t,1/t],t=1..10)],style=point,color=blue);
>listplot([seq([t,cos(t)],t=1..20)],style=point,color=blue);
```

יחידות הגבול

משפט:

אם הסדרה (a_n) מתכנסת, אזי הגבול שלה הוא יחיד.

סדרות מתבדרות: סוגים שונים

- הסדרה (a_n) מתבדרת ושואפת ל $+\infty$ אם
  $\forall A>0, \exists N_0 \in \mathbf{N} | n \geq N_0 \Rightarrow a_n > A$
- הסדרה (a_n) מתבדרת ושואפת ל $-\infty$ אם
  $\forall B>0, \exists N_0 \in \mathbf{N} | n \geq N_0 \Rightarrow a_n < B$
- סדרה שאין לה גבול היא גם סדרה מתבדרת

סדרה חשבונית

תהא (a_n) סדרה חשבונית בעלת הפרש d.

א. אם $d=0$, הסדרה קבועה, לכן היא מתכנסת.

ב. אם $d>0$, הסדרה מתבדרת ושואפת ל- $+\infty$.

ג. אם $d<0$, הסדרה מתבדרת ושואפת ל-$-\infty$.

7 (C)פרופ' נח דנא-פיקארד

סדרה הנדסית

תהא (a_n) סדרה הנדסית בעלת מנה q.

א. אם $q=1$ או $q=0$, הסדרה קבועה, לכן היא מתכנסת.

ב. אם $-1<q<1$, הסדרה מתכנסת ושואפת ל- 0.

ג. אם $q>1$, הסדרה מתבדרת ושואפת ל-∞ עם הסימן של האיבר הראשון.

ד. אם $q<-1$, הסדרה מתבדרת ואין לה גבול.

8 (C)פרופ' נח דנא-פיקארד

הערה חשובה

כל המשפטים הבאים הם
משפטים חד-כווניים,
כלומר
ההיפך איננו נכון.

אלגברת הגבולות

$\lim_{n\to\infty} u_n$	$\lim_{n\to\infty} v_n$	$\lim_{n\to\infty} (u_n+v_n)$	$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt{u_n}$
l_1	$l_2 \neq 0$	l_1+l_2	$l_1 l_2$	$\frac{l_1}{l_2}$	$\sqrt{l_1}$ if $l_1>0$
$l_1 \neq 0$	0	l_1	0	∞ or no limit	$\sqrt{l_1}$ if $l_1>0$
0	0	0	0	undeterminate	0 if all terms are non negative
$l \neq 0$	∞	∞	∞	0	
0	∞	∞	undeterminate	0	
∞	$l \neq 0$	∞	∞	∞	
∞	0	∞	undeterminate	either ∞ or no limit	$+\infty$ if ...
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	undeterminate	$+\infty$ if ...
$\pm\infty$	$\mp\infty$	undeterminate	$-\infty$	undeterminate	$+\infty$ if ...

אי-שוויונים

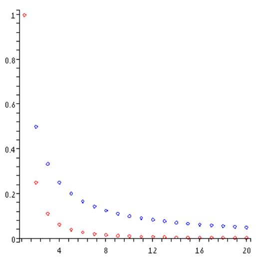
משפט: נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n). נניח שקיים מספר טבעי N_0 כך שלכל מספר טבעי n גדול מ- N_0 אי-השוויון $a_n \le b_n$ מתקיים.

1. אם (a_n) ו- (b_n) מתכנסות, אזי $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
2. אם (a_n) שואפת ל $+\infty$, אזי (b_n) שואפת ל $+\infty$.
3. אם (b_n) שואפת ל $-\infty$, אזי (a_n) שואפת ל $-\infty$.

המשפט הזה נכון גם כאשר שלכל מספר טבעי n גדול מ- N_0 אי-השוויון $a_n < b_n$ מתקיים.

דוגמא

```
> with(plots):
>d1:=listplot([seq([t,1/t],t=1..20)],style=point,color=blue):
>d2:=listplot([seq([t,1/t^2],t=1..20)],style=point,color=red):
> display(d1,d2);
```



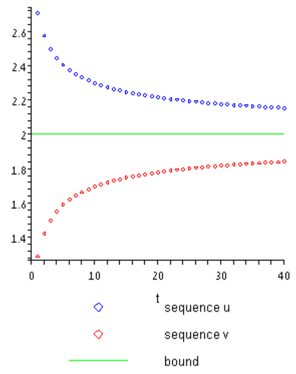
$$a_n = \frac{1}{n^2}, n \ge 1; b_n = \frac{1}{n}, n \ge 1$$

- plot-sequences.mw

חסימה מלעיל וחסימה מלרע

הגדרה: נתונה סדרה (a_n).

1. אומרים שהסדרה הזאת חסומה מלעיל אם קיים מספר ממשי M כך שלכל מספר טבעי n מתקיים: $a_n < M$
2. אומרים שהסדרה הזאת חסומה מלרע אם קיים מספר ממשי m כך שלכל מספר טבעי n מתקיים: $a_n > m$
3. אם הסדרה חסומה מלעיל וחסומה מלרע, אומרים שהיא חסומה.



$$u_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$v_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

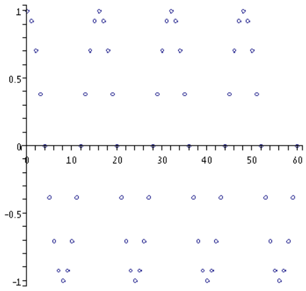
סדרה מחזורית

הגדרה: הסדרה (a_n) נקראת סדרה מחזורית אם קיים מספר טבעי t שונה מ-0 כך שלכל מספר טבעי n מתקיים $a_{n+t}=a_n$.

המספר t כנ"ל הקטן ביותר נקרא המחזור של (a_n) והוא מסומן ב-T.

משפט: אם הסדרה (a_n) מחזורית ובעלת מחזור $T>1$, אזי היא מתבדרת.

דוגמא



listplot([seq([t,cos(t*Pi/8)],t=0..60)],style=point,color=navy);

plot-sequences.mw

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{8}, n \geq 0$$

מונוטוניות

הגדרה: נתונה סדרה (a_n).

1. אומרים שהסדרה עולה ממש אם לכל n מתקיים $a_n<a_{n+1}$
2. אומרים שהסדרה עולה אם לכל n מתקיים $a_n\leq a_{n+1}$
3. אומרים שהסדרה יורדת ממש אם לכל n מתקיים $a_n>a_{n+1}$
4. אומרים שהסדרה יורדת אם לכל n מתקיים $a_n\geq a_{n+1}$
5. אומרים שהסדרה קבועה אם לכל n מתקיים $a_n=a_{n+1}$

חסימה ומונוטוניות

משפט:

1. אם הסדרה (a_n) מתכנסת, אזי היא חסומה.
2. אם הסדרה (a_n) עולה וחסומה מלעיל, אזי היא מתכנסת.
3. אם הסדרה (a_n) יורדת וחסומה מלרע, אזי היא מתכנסת.

משפט הסנדביץ'

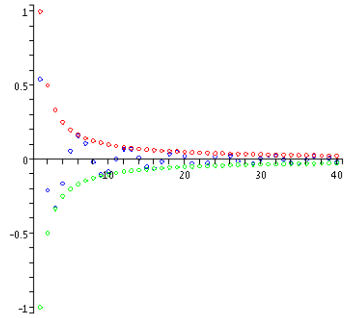
נתונות שלוש סדרות (a_n), (b_n) ו- (c_n) כך שלכל מספר טבעי n מתקיים $a_n<b_n<c_n$ (אפשר גם אי-שוויונים חלשים).

אם (a_n) ו- (c_n) מתכנסות ואם יש להן אותו גבול l, אזי (b_n) מתכנסת ושואפת ל-l.

דוגמא

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\cos n}{n} \\ b_n = -\dfrac{1}{n} \quad ; \ \forall n>0, b_n \le a_n \le c_n \\ c_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

```
>s1:=listplot([seq([t,(1/t)*cos(t)],t=1..40)],style=point,color=blue):
>
s2:=listplot([seq([t,(1/t)],t=1..40)],style=point,color=red):
> s3:=listplot([seq([t,(-1/t)],t=1..40)],style=point,color=green):
> display(s1,s2,s3);
```



Maple commands

```
> limit(1/t,t=infinity);

> limit((1+t)/(2+3*t),t=infinity);

> limit(exp(t),t=infinity);

> limit(cos(t),t=infinity);
```

- plot-sequences.mw