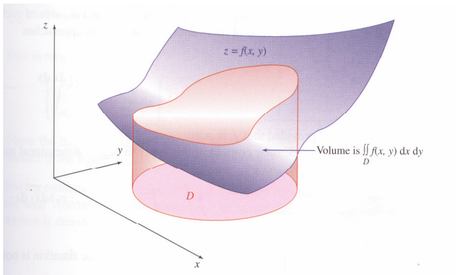
בס"ד

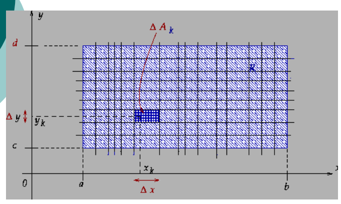
אינטגרלים כפולים

פרופ' נח דנא-פיקארד
ניסן תשס"ט

מוטיבציה ראשונה: חישוב נפח



סכומי רימן – חלוקת מלבן למלבנים



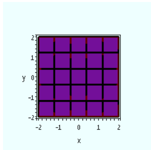
- אם הגבול באגף ימין קיים וסופי,

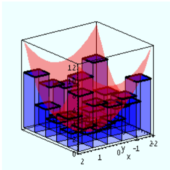
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_k f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

אינטגרל על מלבן

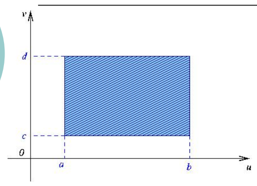
- <u>אנימציה</u> בעזרת Maple

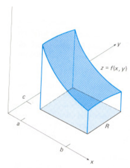
$$f(x,y)=x^2+2y^2$$





אינטגרל על מלבן





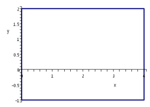
$$\int_D f(u,v)\,du\,dv=\int_{v=c}^{v=d}\left(\int_{u=a}^{u=b} f(u,v)\,du\right)dv$$

משפט פוביני (חלש)

בתנאים מסוימים (כגון אם הפונקציה הנתונה רציפה מעל המלבן הנתון במישור) אפשר להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\int_{v=c}^{v=d}\int_{u=a}^{u=b} f(u,v)\,du\,dv=\int_{u=a}^{u=b}\int_{v=c}^{v=d} f(u,v)\,dv\,du$$

דוגמאות



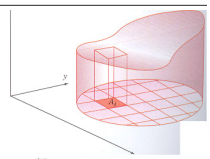
- דוגמא 1:

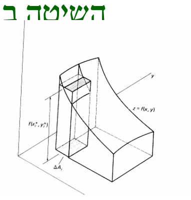
$$I=\int_{-1}^{2}\int_{0}^{4}(x^2+xy)\,dx\,dy$$

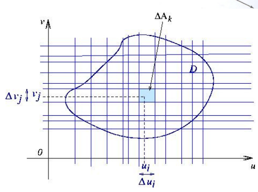
- דוגמא 2:

$$I=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} x\sin y\,dx\,dy$$

השיטה במקרה הכללי: סכומי רימן





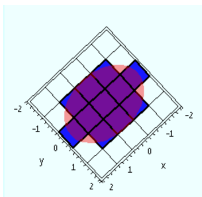


$$S=\sum f(u_i,v_j)\,\Delta\mu_{i,j}$$

$$S\to\iint_D f(u,v)\,d\mu$$
$$(\Delta\mu_{i,j}\to 0)$$

"חלוקת" התחום (כמעט...) לתאים מלבניים

$$x^2+2y^2\le 3$$

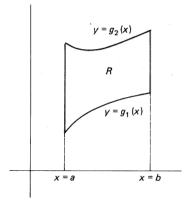


תחומי אינטגרציה

התחום R הוא **פשוט אנכי**
(vertically simple)
אם הוא מוגדר ע"י אי שוויונים מהצורה

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \end{cases}$$

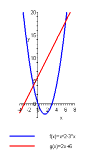
כאשר g_1 ו g_2 הן רציפות על הקטע $[a, b]$.



דוגמא

- R מוגדר ע"י $\begin{cases} -1 \le x \le 6 \\ x^2 - 3x \le y \le 2x+6 \end{cases}$
- $\varphi(x, y) = x^2 - xy^2 - 1$
- האינטגרל:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \varphi(x, y)\, d\mu \\ &= \int_{-1}^{6} \int_{x^2-3x}^{2x+6} (x^2 - xy^2 - 1)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{6} \left[x^2 y - \frac{1}{3} x y^3 - y \right]_{x^2-3x}^{2x+6} \\ &= \int_{-1}^{6} \left(\frac{1}{3} x^7 - 3x^6 + 9x^5 - \frac{38}{3} x^4 - 19x^3 - 65x^2 - 77x - 6 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{24} x^8 - \frac{3}{7} x^7 + \frac{3}{2} x^6 - \frac{38}{15} x^5 - \frac{19}{4} x^4 - \frac{65}{3} x^3 - \frac{77}{2} x^2 - 6x \right]_{-1}^{6} \\ &= -\frac{1434083}{120} \\ &\approx -11950.70 \end{aligned}$$

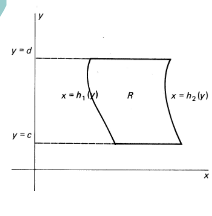


תחומי אינטגרציה

התחום R הוא **פשוט אופקי**
(horizontally simple)
אם הוא מוגדר ע"י אי שוויונים
מהצורה

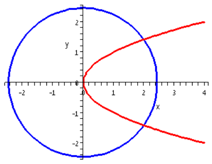
$$\begin{cases} c \le y \le d \\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \end{cases}$$

כאשר h_1 ו h_2 הן רציפות על הקטע $[c, d]$.



דוגמא (לא מעובדת)

- R הוא התחום המוגבל ע"י המעגל שמרכזו בראשית עם רדיוס $\sqrt{6}$ והפרבולה שמשוואתה היא $x = y^2$

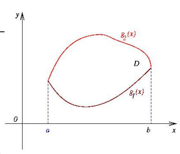


- הפונקציה נתונה ע"י $\varphi(x, y) = x^2 - y - 1$

הנחיה חשובה

שרטט תמיד סקיצה של תחום האינטגרציה לפני חישוב של אינטגרל כפול

משפט פוביני (חזק)



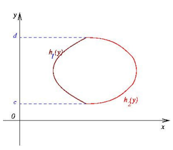
תהי $f(x,y)$ מוגדרת ורציפה על התחום D במישור.

1. אם D מוגדר ע"י אי-השוויונים $a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$, כאשר g_1 ו- g_2 רציפות על $[a,b]$, אזי:

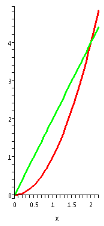
$$\iint_D f(x,y)\, d\mu = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

2. אם D מוגדר ע"י אי-השוויונים $c \le x \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$, כאשר h_1 ו- h_2 רציפות על $[c,d]$, אזי:

$$\iint_D f(x,y)\, d\mu = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$



שימוש במשפט פוביני

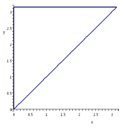


$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

דוגמאות

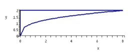
.1

$$I=\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$$



.2

$$I=\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx$$



תכונות אלגבריות של האינטגרלים הכפולים

יהי c קבוע ו f ו g פונקציות רציפות על תחום R שבו f(x,y) מקבלת מינימום m ומכסימום M. נסמן ב $\alpha(R)$ את שטח של התחום R.

אם כל האינטגרלים הבאים קיימים, אזי:

$$(1)\quad \iint_R c\,f(x,y)\,dx\,dy = c\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

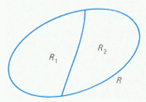
$$(2)\quad \iint_R \left[f(x,y)+g(x,y)\right]dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

$$(3)\quad m\cdot\alpha(R) \le \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \le M\cdot\alpha(R)$$

איחוד תחומי אינטגרציה

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

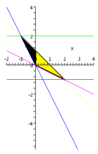
כאשר R_1, R_2 הם תחומים שאיחודם R אך הפנים של האחד זר לפנים של השני. ראה ציור.

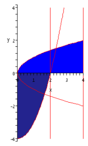


איחוד תחומי אינטגרציה – דוגמאות

- שרטט את תחום האינטגרציה.
- אח"כ חשב את שטח התחום הזה.
- נתונים:

1. $I = \int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{1-x} dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{-x/2}^{1-x} dy\,dx$
2. $I = \int_{0}^{2}\int_{x^2-4}^{0} dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{x}} dy\,dx$



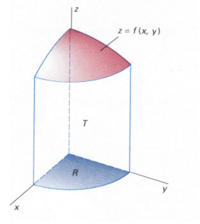


חישוב נפח באמצעות אינטגרל כפול

נתונה פונקציה f רציפה ואי שלילית על תחום חסום R.
אזי הנפח V של גוף הנמצא מתחת ל גרף של f ומעל התחום R נתון ע"י האינטגרל הכפול

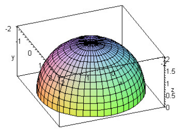
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

(כמובן בתנאי שהאינטגרל קיים)



דוגמא

- התחום מוגבל מלרע ע"י המישור xy ומלעיל ע"י חצי כדור שמרכזו בראשית ובעל רדיוס 2.



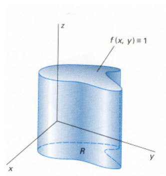
$$V = \iint_R \sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}\,d\mu$$

- צריכים קואורדינטות אחרות (ראה להלן... ☺)

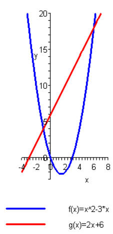
חישוב נפח באמצעות אינטגרל כפול

זה מקרה פרטי של חישוב נפח, עבור

$$f(x,y)=1,\ \forall (x,y)\in R$$



דוגמא: חישוב שטח ע"י אינטגרל מסוים



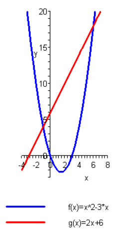
$$S=\int_{-1}^{6}\left((2x+6)-(x^2-3x)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{6}\left(-x^2+5x+6\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{6}$$

$$=\frac{343}{6}\approx 57.17.$$

חישוב אותו שטח עם אינטגרל כפול

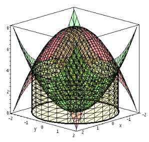


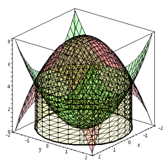
$$S=\int_{-1}^{6}\int_{x^2-3x}^{2x+6} dy\,dx=\int_{-1}^{6}\left[y\right]_{x^2-3x}^{2x+6}dx$$
$$=\int_{-1}^{6}\left[(2x+6)-(x^2-3x)\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{6}\left[-x^2+5x+6\right]dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{6}$$
$$=\frac{343}{6}\approx 57.17$$

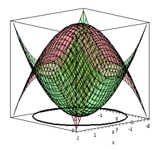
חישוב נפח בעזרת אינטגרל כפול

- חשב את הנפח של הגוף המוגבל ע"י הפרבולואידים הנתונים ע"י המשוואות

$$z=8-(x^2+y^2)$$
$$z=x^2+y^2$$







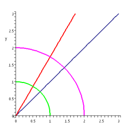
קואורדינטות קוטביות

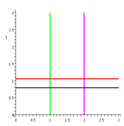
- משוואות הישרים:

$y=x,\ y=x\sqrt{3}$

- משוואות המעגלים:

$x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$





מעבר מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטזיות

- נוסחאות מעבר:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \rho > 0, \theta \in \mathrm{R}$$

- שטח אלמנטרי:

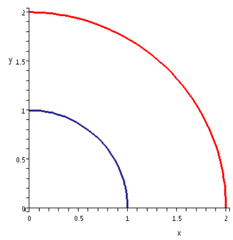
$$dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

דוגמא

- חשב את האינטגרל

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$$

כאשר D הוא האיזור ברביע
הראשון המוגבל ע"י
המעגלים שמרכזם
בראשית הצירים ובעלי
רדיוסים 1 ו-2 בהתאמה.

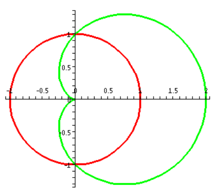


תחום נתון בקואורדינטות קוטביות

- מצא את השטח של
התחום הנמצא בתוך
הקרדיואידה C_1 ומחוץ
למעגל C_2 הנתונים ע"י
המשוואות הבאות:

$C_1 : \rho = 1 + \cos\theta$

$C_2 : \rho = 1$



- תשובה:

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

דוגמא נוספת

- http://ndp.jct.ac.il/COURSES_HP/Exos/Infi2/DoubleIntegral-PolarCoord-1.jpg

החלפת קואורדינטות

- תזכורת: הצבה באינטגרל מסוים (אינפי א')

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int_c^d f(u)\,du$$

כאשר $u = g(x)$

החלפת קואורדינטות - יעקוביאן

- מבקשים לחשב את האינטגרל הכפול $\iint_R f(x,y)\,dA$ מעל התחום R במישור xy.
- נתון $x = g(u,v),\ y = h(u,v),\ (u,v) \in S$
- אזי: $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\left(g(u,v),h(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$
- הביטוי $J\left((x,y),(u,v)\right) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

נקרא היעקוביאן של הטרנספורמציה (ההחלפה)

Jacobian – Maple commands

```
> with(Student[MultivariateCalculus]):
> Jacobian([x+2*y, x-y],[x,y]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> Jacobian([2*x-3*y^2,x^2+y],[x,y], output=matrix);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -6y \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Jacobian([2*x-3*y^2,x^2+y],[x,y], output=determinant);
```

$$2 + 12\,y\,x$$

דוגמא 1

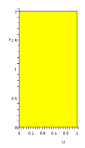
- חשב את האינטגרל

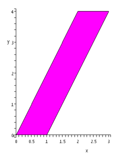
$$I = \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

- רמז: השתמש שהחלפת הקואורדינטות הבאה:

$$u = \frac{2x-y}{2}$$

$$v = \frac{y}{2}$$





דוגמא 2

Example 2 Show that when changing to polar coordinates we have $dA = r\,dr\,d\theta$

Solution

So, what we are doing here is justifying the formula that we used back when we were integrating with respect to **polar coordinates**. All that we need to do is use the formula above for dA.

The transformation here is the standard conversion formulas,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

The Jacobian for this transformation is,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta - \left(-r\sin^2\theta\right) \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= r \end{aligned}$$

We then get,

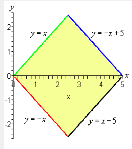
$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = |r|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$

ועוד דוגמא

Example 3 Evaluate $\iint_R x+y\,dA$ where R is the trapezoidal region with vertices given by $(0,0)$, $(5,0)$, $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ and $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ using the transformation $x=2u+3v$ and $y=2u-3v$.

Solution

First, let's sketch the region R and determine equations for each of the sides.



Each of the equations was found by using the fact that we know two points on each line (*i.e.* the two vertices that form the edge).

While we could do this integral in terms of x and y it would involve two integrals and so would be some work.

Let's use the transformation and see what we get. We'll do this by plugging the transformation into each of the equations above.

Let's start the process off with $y=x$.

$$\begin{aligned} 2u-3v &= 2u+3v \\ 6v &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Transforming $y=-x$ is similar.

$$\begin{aligned} 2u-3v &= -(2u+3v) \\ 4u &= 0 \\ u &= 0 \end{aligned}$$

Next we'll transform $y=-x+5$.

$$\begin{aligned} 2u-3v &= -(2u+3v)+5 \\ 4u &= 5 \\ u &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Finally, let's transform $y=x-5$.

$$\begin{aligned} 2u-3v &= 2u+3v-5 \\ -6v &= -5 \\ v &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

The region S is then a rectangle whose sides are given by $u=0$, $v=0$, $u=\frac{5}{4}$ and $v=\frac{5}{6}$ and so the ranges of u and v are,

$$0 \le u \le \frac{5}{4} \qquad 0 \le v \le \frac{5}{6}$$

Next, we need the Jacobian.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6-6=-12$$

The integral is then,

$$\begin{aligned} \iint_R x+y\,dA &= \int_0^{\frac{5}{6}}\int_0^{\frac{5}{4}} (2u+3v)+(2u-3v)\left|-12\right| du\,dv \\ &= \int_0^{\frac{5}{6}}\int_0^{\frac{5}{4}} 48u\,du\,dv \\ &= \int_0^{\frac{5}{6}} 24u^2\Big|_0^{\frac{5}{4}}\,dv \\ &= \int_0^{\frac{5}{6}} \frac{75}{2}\,dv \\ &= \frac{75}{2}v\Big|_0^{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{125}{4} \end{aligned}$$