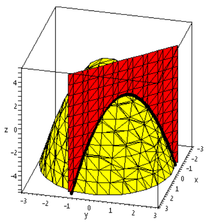
אופטימיזציה
כופלי לגרנג'

פרופ' נח דנא–פיקארד
אדר ב' תשס"ח

מקסימום עם אילוץ: דוגמא של שאלה

הפונקציה: $f(x,y)=4-x^2-y^2$

האילוץ: $x+y-2=0$

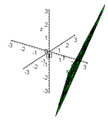


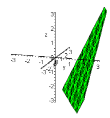
דוגמא 2: שיטת ההצבה

- השאלה: מצאו את הנקודה על המישור שמשוואתו היא
2x+y-z-5=0
הקרובה ביותר לראשית הצירים
- שיטה אפשרית: הצבה של z=2x+y-5 בתוך

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

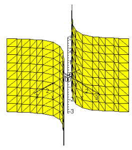
וחישוב של מינימום של פונקציה של שני משתנים בלתי תלויים
- תשובה: P(5/3,5/6,-5/6)

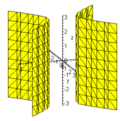




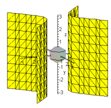
דוגמא 3: שיטת ההצבה לא תמיד מתאימה

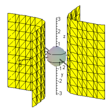
- השאלה: מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים על המשטח הנתון ע"י המשוואה $x^2 - y^2 = 1$
- לא כל הצבה עובדת. שימו לב לצל של המשטח על מישור מערכת.

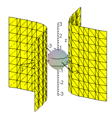


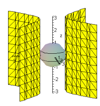


הכדור המתנפח – 1









משפט

נתונה פונקציה f של שלושה משתנים (x,y,z) מוגדרת בתחום D.
תהי C עקומה בתוך D הנתונה ע"י הפרמטריזציה $\vec{r}(t) = g(t)\,\vec{i} + h(t)\,\vec{j} + k(t)\,\vec{k}$.
אם P_0 היא נקודה על C שבה יש ל- f מקסימום או מינימום ביחס לערכיה על C, אזי ∇f אורתוגונלי ל-C ב- P_0.

מסקנה

נתונה עקומה C ע"י פרמטריזציה גזירה $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.
תהי f פונקציה המוגדרת בתחום D במישור, כך שהעקומה C פנימית ל-D.
בנקודה שבה יש ל-f מקסימום או מינימום ביחס לערכיה על C מתקיים $\nabla f \cdot \vec{v} = 0$, כאשר $\vec{v}$ הוא וקטור "המהירות" של C.

שיטת כופלי לגרנג'

נתונות שתי פונקציות גזירות f ו- g.
על מנת למצוא את נקודות המקסימום ואת נקודות המינימום של f בכפוף לאילוץ $g(x,y,z) = 0$, יש למצוא ערכים של (x,y,z) ושל λ המקיימים את מערכת המשוואות

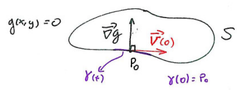
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

עבור פונקציות של שני משתנים, המערכת המתאימה היא

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

הוכחה פשוטה
של שיטת כופלי לגרנג'

Consider the function $f(x,y)$ and the constraint $S = \{(x,y)/g(x,y) = 0\}$. Assume $P_0 = (x_0, y_0)$ is the point on S where f is max:



We can assume that S is a curve γ near P_0 of parametric equations $(x(t), y(t))$ such that $(x(0), y(0)) = P_0$. Now if we evaluate f on γ and we define

$$h(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$$

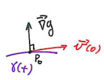
it follows that h has a max at $t = 0$, so in particular, by the chain rule,

$$h'(0) = f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}(0) = 0,$$

where $\vec{v}(0)$ is the velocity at $t = 0$. This means that

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \perp \vec{v}(0).$$

On the other hand, since the velocity is always tangent to the curve, in this case the constraint S, and since $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ is perpendicular to S at P_0



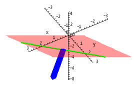
it follows that $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ is parallel to $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$, that is there exists a scalar λ such that

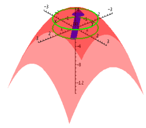
$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0).$$

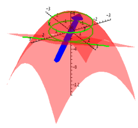
חזרה לדוגמא הראשונה: שני הגרדיאנטים תלויים ליניארית

הפונקציה: $f(x,y)=4-x^2-y^2$

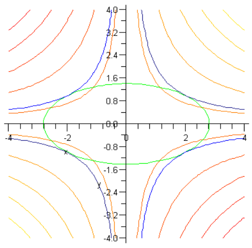
האילוץ: $x+y-2=0$







דוגמא



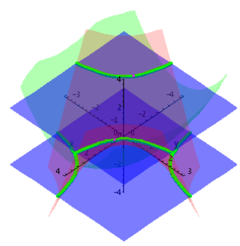
שאלה: מצאו את נקודות הקיצון של $f(x,y)=xy$

על האליפסה E שמשוואתה היא $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

תשובה: $(x,y)=(\pm 2,1)$ או $(x,y)=(\pm 2,-1)$.

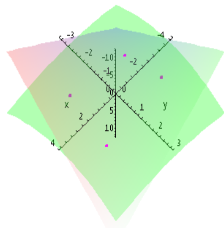
פקודות Maple: צריכים לטעון קובץ פקודות מיוחד

```
> with(Student[MultivariateCalculus]);
> LagrangeMultipliers(x*y,[x^2/8+y^2/2-1],[x,y]);
                                   [2, 1], [-2, -1], [-2, 1], [2, -1]
> LagrangeMultipliers(x*y,[x^2/8+y^2/2-1],[x,y],output=plot);
```



נקודות קיצון עם אילוץ: הנקודות מסומנות

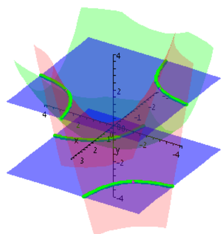
```
> LagrangeMultipliers(x*y,[x^2/8+y^2/2-1],[x,y],output=plot,showlevelcurves = false);
```



נקודות קיצון עם אילוץ: הנקודות מסומנות בשרטוט

- Animated graph

```
> LagrangeMultipliers(x*y,[x^2/8+y^2/2-1],[x,y],output=plot,showlevelcurves = true);
```



נקודות קיצון עם שני אילוצים

השאלה: למצוא נקודות קיצון של הפונקציה הדיפרנציאבילית f בכפוף לשני אילוצים המוגדרים ע"י

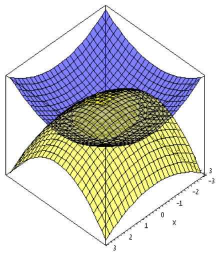
$g_1(x,y,z)=0$ ו- $g_2(x,y,z)=0$

כאשר g_1,g_2 הן שתי פונקציות דיפרנציאביליות.

נקודות קיצון עם שני אילוצים

- פותרים את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$



דוגמא: שני אילוצים

$$C_1 : z = x^2 + y^2 - 1$$
$$C_2 : z = 4 - x^2 - 2y^2$$