פונקציות וקטוריות

פרוף' נח דנא-פיקארד

אייר תשס"ח

הגדרה

- פונקציה $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$
- נסמן

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{x}\in\mathbf{R}^n \; ; \; \vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \vec{y}\in\mathbf{R}^m$$

- נכתוב $\vec{y}=f\left(\vec{x}\right)$ אם קיימות פונקציות ממשיות של n משתנים ממשיים כך ש-

$$\vec{y}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \dots\dots \\ f_m(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

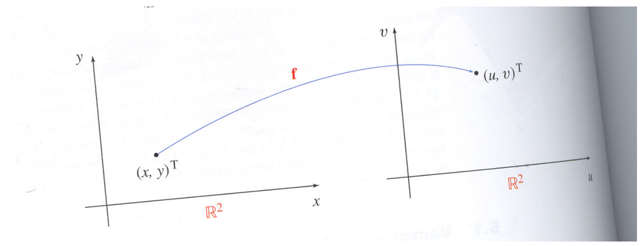
תחום קיום הפונקציה

- הוא התחום המשותף לכל הקומפוננטים
- דוגמא: אם $f(x_1,x_2)=\left(x_1\sqrt{x_2},\dfrac{x_1}{x_2},\ln x_1+2x_2\right)$

התחום הוא $(0,+\infty)\times\mathbf{R}^*$

3

דוגמא 1: $f:\mathrm{R}^2\rightarrow\mathrm{R}^2$



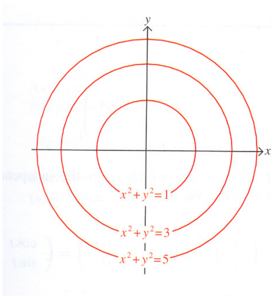
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_2(x,y)\end{pmatrix}$$

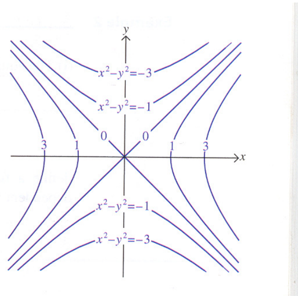
4

תאור ע״י קווי גובה

- הפונקציה $f:R^2\to R^2$ נתונה ע"י $f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2+y^2\\ x^2-y^2\end{pmatrix}$

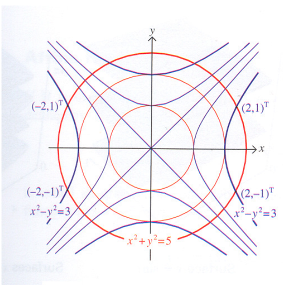
קווי גובה של f_2 | קווי גובה של f_1

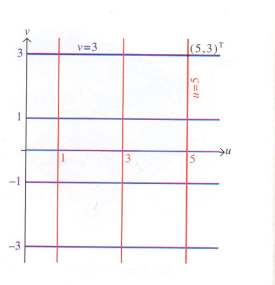




5

- נניח את קווי הגובה של הפונקציות f_1,f_2 אחד על השני ונקבל את הדיאגראמה הבאה משמאל.
- התמונה המתקבלת ע"י הפונקציה הנה השריג שבדיאגרמה הבאה מימין (*שימו לב: שריג של קטעים, לא של ישרים*)



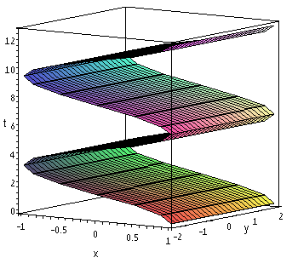


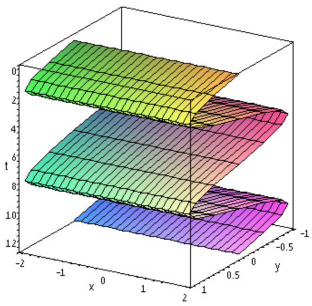
6

דוגמא 2 : התמונה של פונקציה של משתנה ממשי אחד

להלן שני משטחים ב- $\mathbf{R}^3$ הנתונים ע"י המשוואות הבאות:

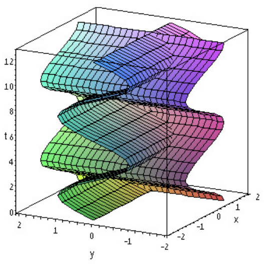
$x=\cos t$ $\qquad\qquad$ $y=\sin t$

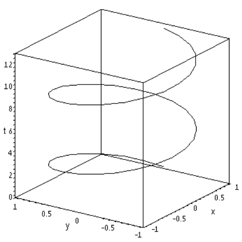


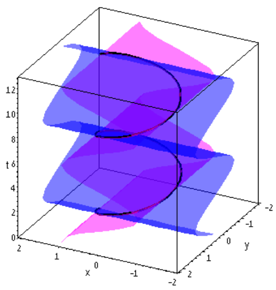


7

החיתוך של שני המשטחים הנ"ל







$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

8

רציפות - גזירה

נתון תחום $D \subset \mathbf{R}^n$ ונתונה פונקציה $f : D \to \mathbf{R}^m$ ע"י

$$\overrightarrow{f(x)} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

כאשר D הוא תחום פתוח ב-$\mathbf{R}^n$.

1. הפונקציה *f* רציפה בנקודה P ב-D אם כל הפונקציות f_k רציפות ב-P.
2. הפונקציה *f* גזירה בנקודה P ב-D אם כל הפונקציות f_k גזירות ב-P.

חישוב נגזרת

אם הפונקציה f גזירה בנקודה ξ, אזי נגזרתה נתונה ע"י

$$\left.\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right|_{\xi} = \mathbf{f}'(\xi) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\xi} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\xi} & \cdots\cdots \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{\xi} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\xi} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\xi} & \cdots\cdots \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{\xi} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right|_{\xi} & \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\right|_{\xi} & \cdots\cdots \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right|_{\xi} \end{pmatrix}$$

(הנגזרות החלקיות מחושבות בנקודה ξ) .

שימו לב: בכל נקודה, הנגזרת היא טרנספורמציה ליניארית $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

דוגמא 1

- נתון

$$f(x_1,x_2)=(x_1x_2,3x_1+2x_2,x_1^2x_2^3)$$

- כל הקומפוממטים הם פונקציות גזירות על **R**, לכן הפונקציה f גזירה על **R**.

- הנגזרת נתונה ע"י

$$\frac{df}{dx}=\begin{pmatrix} x_2 & 3 & 2x_1x_2^3 \\ x_1 & 2 & 3x_1^2x_2^2 \end{pmatrix}$$