שיטות נומריות לפתרון משוואה דיפרנציאלית

שיטת Euler

- **Leonhard Euler**
- **Born 15 :April 1707 in Basel, Switzerland**
  Died 18 :Sept 1783 in St Petersburg, Russia

הבעיה

נתונה משוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלתי

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר הנקודה (t_0, y_0) נתונה.

אם אי אפשר לפתור את הבעיה בשיטה אנליטית, נחפש קירוב של הפתרון.

תאור שיטת אוילר – 1

- בוחרים "צעד" המסומן ב- h או ב- Δt.
- מגדירים סדרה של ערכים של המשתנה t:

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t = t_0 + 3\Delta t$$

$$\vdots$$

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t = t_0 + n\Delta t$$

תאור שיטת אוילר –2

- מחשבים את שיפוע המשיק לגרף הפתרון בעזרת המשוואה הדיפרנציאלית עצמה.
- לדוגמא: כאשר $t = t_0$ שיפוע המשיק הוא

$$f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

- משוואת המשיק בנקודה (t_0, y_0) :

$$y - y_0 = f(t_0, y_0)\left(t - t_0\right)$$

דהיינו

$$y = f(t_0, y_0)\left(t - t_0\right) + y_0$$

תאור שיטת אוילר – 3

- משתמשים בישר הזה כדי לחשב קירוב של הערך של y כאשר $t = t_1$:

$$y_1 = f(t_0, y_0)\left(t_1 - t_0\right) + y_0 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot \Delta t$$

- באותה שיטה ובעזרת הנקודה (t_1, y_1) מחשבים שיעורים של נקודה נוספת:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot \Delta t$$

- וכן הלאה. נוסחת האינדוקציה המתקבלת היא:

$$y_n = y_{n-1} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \Delta t$$

שיטת אוילר – סיכום

– גודל הצעד הנבחר: Δt

הנקודה (t_n, y_n) מתקבלת מהנקודה (t_{n-1}, y_{n-1})
ע"י הנוסחה הבאה:

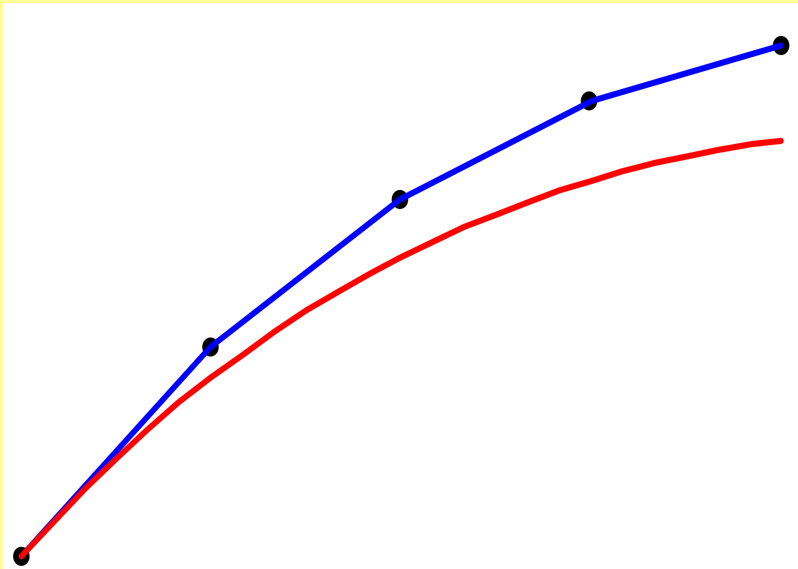
$$t_n = t_{n-1} + \Delta t$$

$$y_n = y_{n-1} + f(t_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \Delta t$$

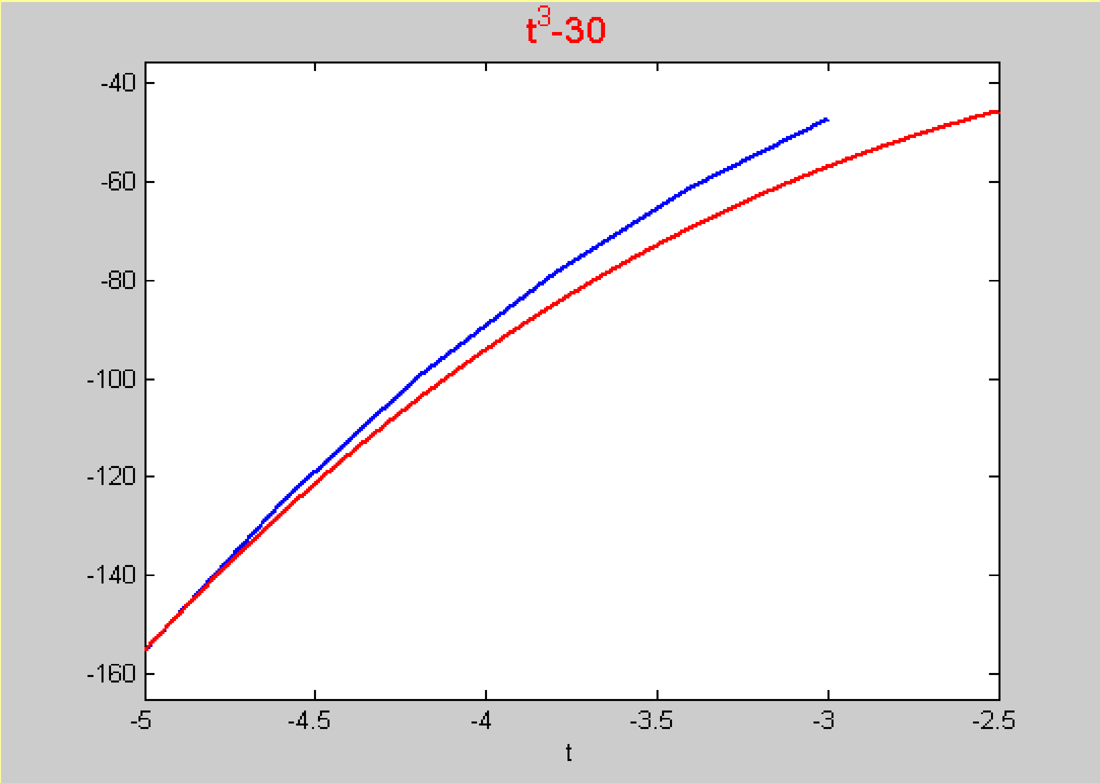
דוגמא 1

נתונות הנקודה (-5, -155) והנגזרת של הפונקציה המבוקשת $y'(t) = 3t^2$.
שרטטי את גרף הפונקציה המוגדרת ע"י
$y(t) = t^3 - 30$

Hint: follow your nose!!



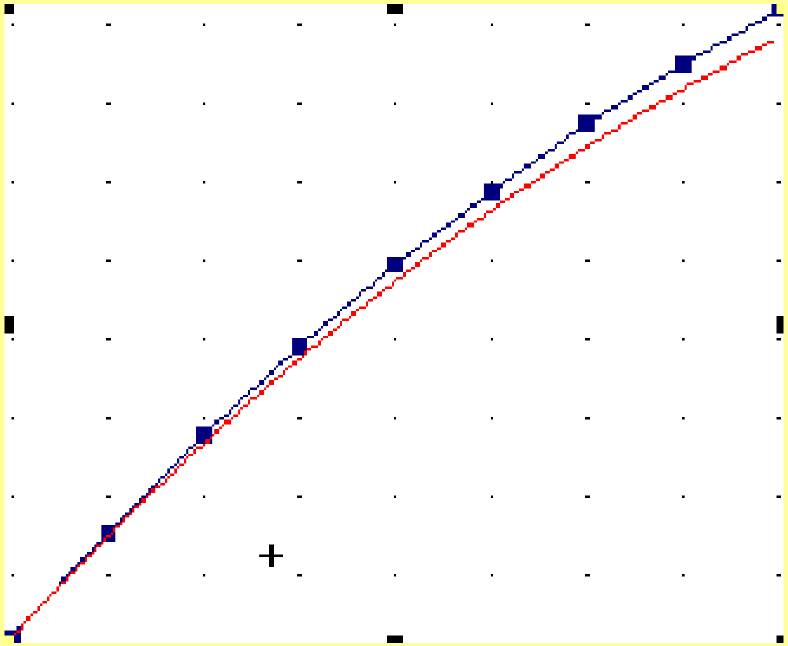
דוגמא 1 – המשך



איך ניתן לשפר את הקירוב?

Improved Euler's method

$t = -5; -4.8; -4.6; \ldots\ldots\ldots\ldots$



The algorithm: $$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f'(t_n)$$

$$\frac{dy}{dt} = f\,(t, y), \qquad y\,(t_0) = y_0$$

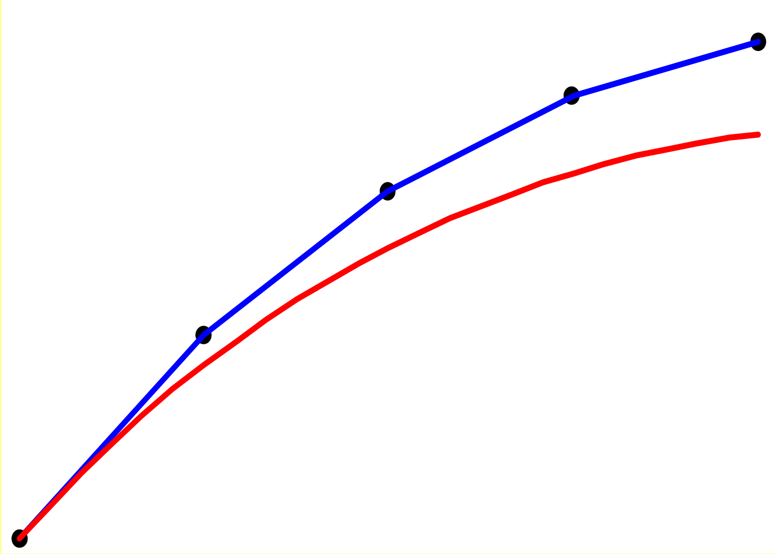
t_0 $\qquad$ y_0

$t_1 = t_0 + \Delta t$ $\qquad$ y_1

$t_2 = t_1 + \Delta t$ $\qquad$ y_2

....

$t_{k+1} = t_k + \Delta t$ $\qquad$ y_{k+1}



שיטת אוילר משופרת

- משתמשים ב"שיפוע ממוצע" על כל קטע
- בעזרת הקירוב ע"י המשיך מחשבים קירוב של y כאשר $t = t_1$ והוא יסומן עכשיו ב- y_1^*.

$$y_1^* = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot \Delta t$$

- מחשבים את הממוצע של השיפועים

$f(t_0, y_0)$ ו- $f(t_1, y_1^*)$, דהיינו $\frac{1}{2}\left(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^*)\right)$

- משוואת הישר דרך (t_0, y_0) עם השיפוע הזה:

$$y = \frac{1}{2}\left(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^*)\right)(t - t_0) + y_0$$

שיטת אוילר משופרת – המשך

- כאשר $t = t_1$ קירוב של y נתון ע"י

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^*)\right)(t - t_0) + y_0$$

- וכן הלאה. הנוסחאות הכלליות הן:

$$y_n^* = f(t_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \Delta t + y_{n-1}$$
$$y_n = \frac{1}{2}\left(f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_n, y_n^*)\right)\Delta t + y_{n-1}$$

דוגמא 2

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 1, \qquad y(0) = 1$$

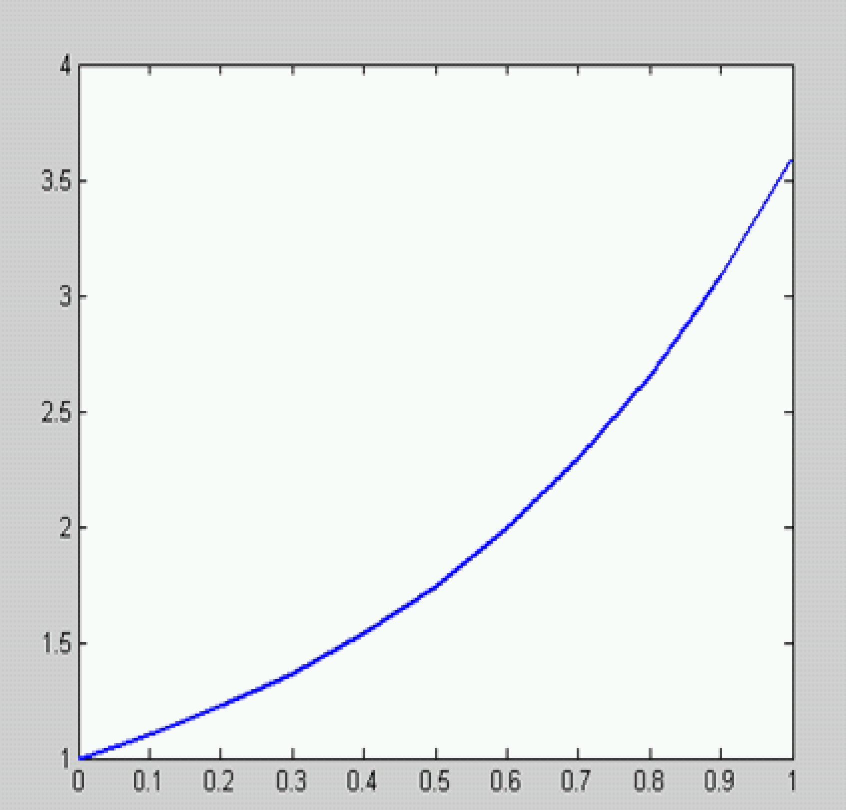
```
f=inline('2*y-1','t','y')
[t, y]=myeuler(f, 0, 1, 1, 10)
```

דוגמא 2– המשך

```
y =

 1.0000
 1.1000
 1.2200
 1.3640
 1.5368
 1.7442
 1.9930
 2.2916
 2.6499
 3.0799
 3.5959
```

plot(t, y)



דוגמא 3

- הבעיה:

$$\frac{dy}{dt} = -2\,t\,y^2, \qquad y\,(0) = 1$$

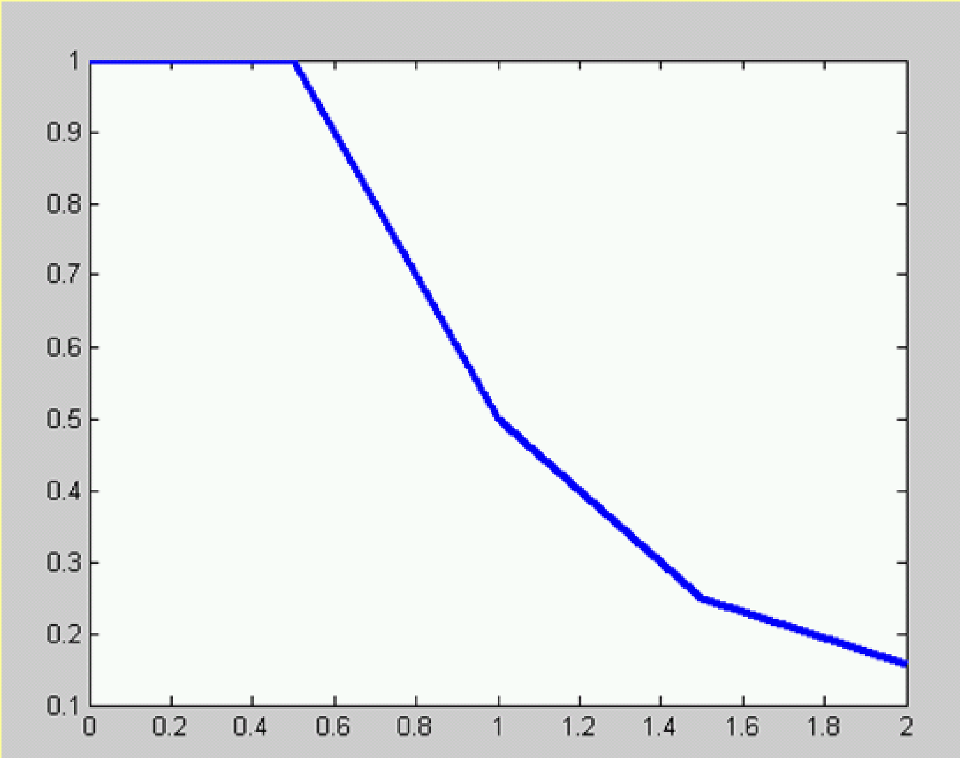
- המשוואה פרידה – הפתרון נתון ע"י הנוסחה הבאה

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

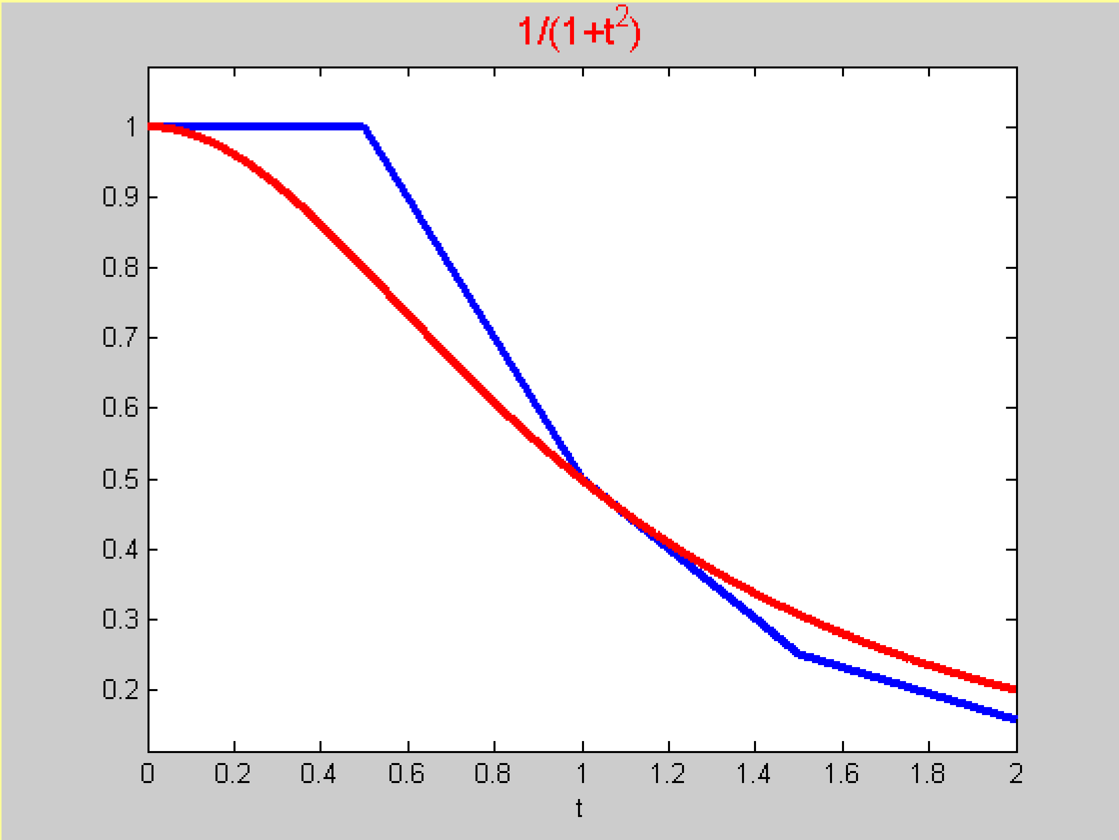
דוגמא 3 – המשך (4 צעדים)

- שיטת אוילר עבור $0 \le t \le 2$ ו- $\Delta t = \frac{2}{4} = 0.5$
-

t=	y=
0	1.0000
0.5000	1.0000
1.0000	0.5000
1.5000	0.2500
2.0000	0.1563



דוגמא 3 – המשך (השוואה בין הגרפים)



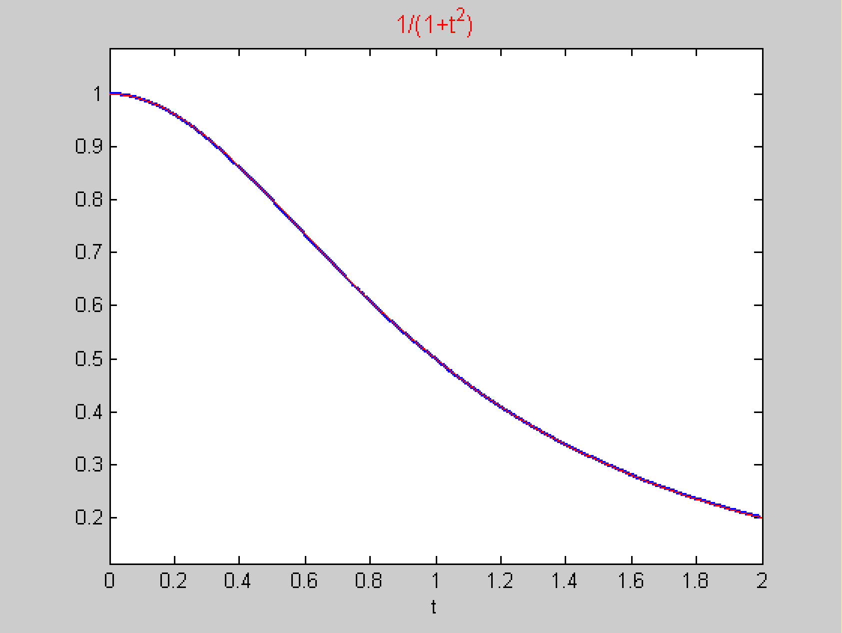
דוגמא 3 עוד פעם (2000 צעדים)

$$\Delta t = 0.001$$

$$n = \frac{2}{0.001} = 2000$$

$y(2) = 0.2$

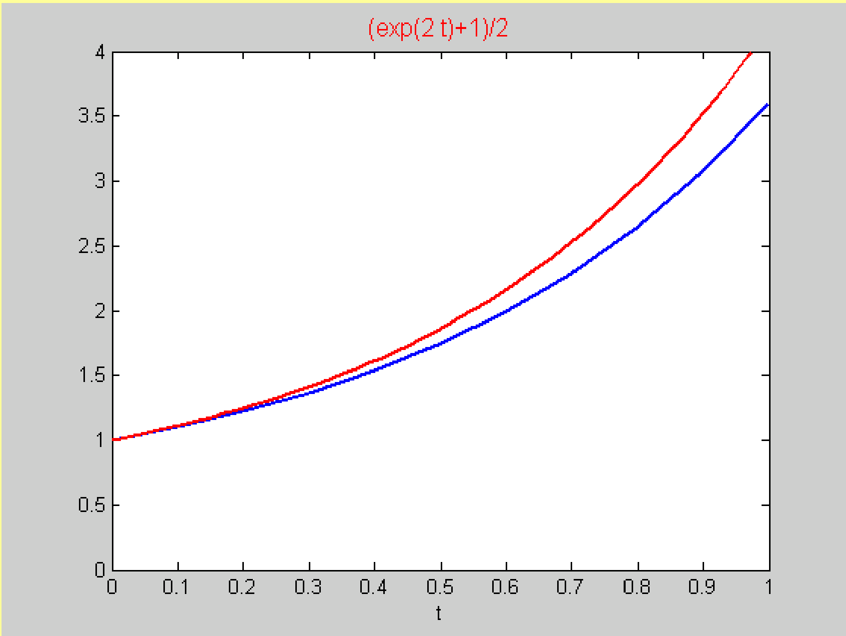
$y_{2000} = 0.1999$



דוגמא 4

hold on

ezplot('(exp(2*t)+1)/2'); axis ([0 1 0 4])



$$y(1) = (e^2 + 1)/2 \approx 4.195$$

$$y_{10} = 3.5959$$

תודה רבה על ההקשבה