משפט קיום ויחידות

פרופ' נח דנא-פיקארד
אדר ב' תשס"ח

המשפט

- **נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון עם תנאי התחלתי**

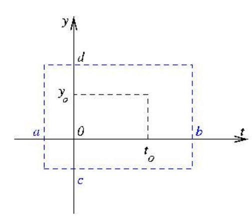
$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר f **ו-** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **הן פונקציות רציפות של שני המשתנים** t,y **המוגדרות במלבן**

$$R = \{(t,y) \in \mathrm{R}^2 \ , a < t < b \wedge c < y < d\}.$$

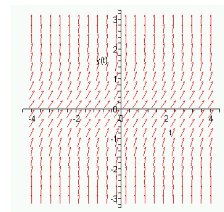
ו- $(t_0; y_0) \in R$

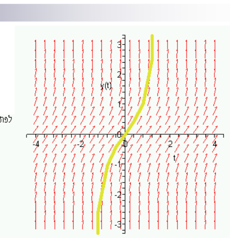
אזי קיים מספר ממשי $h>0$ **ופתרון <u>יחיד</u>** y **עבור (*) בקטע** $(t_0 - h, t_0 + h)$



דוגמא

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$





לפתור את המשוואה באופן אנליטי. המשוואה ניתנת להפרדה.

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt$$

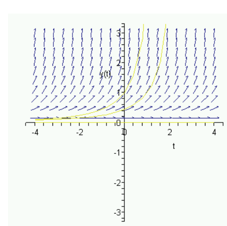
$$\arctan\ y = t + C,\ C \in R.$$

הפתרון הכללי נתון ע"י $y(t) = \tan(t+C),\ C \in R$.

נציב את התנאי ההתחלתי ונקבל $0 = y(0) = \tan(0+C)$ כלומר $C = 0$ (או $C = n\pi,\ n \in Z$).

נתבונן בפתרון $y(t) = \tan(t)$. תחום ההגדרה עבור פתרון זה הוא הקטע הפתוח $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. לגרף של פתרון זה אסימפטוטות אנכיות שמשמוואותיהן הן $t = -\frac{\pi}{2}$ ו- $t = \frac{\pi}{2}$.

דוגמא 2



נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}$. הנגזרת של $y^{2/3}$ ביחס ל y איננה קיימת עבור $y = 0$ כך שלא נוכל להסיק שום מסקנה ממשפט היחידות לגבי מספר הפתרונות למשוואה זו עם תנאי התחלתי $y(t_0) = 0$. ניעזר בניתוח איכותי ובשיטות אנליטיות שאנו מכירים: $y(t) = 0$ לכל t הוא פתרון שווי משקל. המשוואה ניתנת להפרדה: $\int y^{-2/3} dy = \int 3\, dt$ ו $y(t) = (t+c)^3$ (c קבוע). נתבונן במשוואה עם התנאי ההתחלתי $\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}, y(0) = 0$ פתרון אחד הוא פתרון שווי משקל $y_1(t) = 0$ לכל t. פתרון שני מתקבל ע"י הצבת $c = 0$ $y_2(t) = t^3$. כלומר שני פתרונות לאותה משוואה עם התנאי ההתחלתי הנתון.

להלן הגרפים של הפתרונות המתאימים לתנאים ההתחלתיים $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ ו- $y(1) = 1$ (תזהו כל אחד!)