התמרת לפלס

פרופ' נח דנא-פיקארד
אייר תשס"ח

מוטיבציה

- התמרת לפלס נותנת שיטה לפתרון משוואות דיפרנציאליות ע"י הפיכתן למשוואות אלגבריות.
- השיטה נקראת על שמו של המתמטיקאי הצרפתי Pierre Simon de Laplace (1749-1827).
- יש לה שימושים אחרים, לא רק אלה שנלמד בפרק הזה. תגלו אותם (לפחות חלקם) בקורסים אחרים (פיזיקה וכו')

Pierre-Simon de Laplace

- **Born 23 :March 1749 in Beaumont-en-Auge, Normandy, France**
  Died 5 :March 1827 in Paris, France

הגדרה

- **תהי f פונקציה ממשית של המשתנה הממשי . נגדיר:**

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda} e^{-st} f(t)\,dt$$

- **אם האינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס, התוצאה היא פונקציה של המשתנה הממשי s כך ש- $s>0$.**
- **הפונקציה הזאת נקראת *התמרת לפלס* של הפונקציה f.**
- **הסימון הסטנדרטי הוא: $F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$.**
- שימו לב: הפונקציה f היא פונקציה של המשתנה t (בפיזיקה, הוא הזמן), אבל הפונקציה F היא פונקציה של המשתנה s (בפיזיקה, הפזה).

דוגמא 1

- נתון $f(t)=t$
- אזי: $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} t\,e^{-st}\,dt$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda} t\,e^{-st}\,dt$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{-(1+st)e^{-st}}{s^2}\right]_0^{\lambda}$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{-(1+s\lambda)e^{-s\lambda}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}.$$

דוגמא 2

- נתון $f(t)=e^{at}, a\in \mathrm{R}$
- אזי, אם $s>a$: $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda} e^{(a-s)t}\,dt$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{\lambda}$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{e^{(a-s)\lambda}}{a-s}-\frac{1}{a-s}\right)$$

$$=\frac{1}{s-a}.$$

פקודות Maple - 1

- with(inttrans):
- laplace(expression,t,s,[options]);

```
> with(inttrans):
> laplace(exp(t)+t^2,t,s);
```

$$\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^3}$$

```
> laplace(t^2*sin(t),t,s);
```

$$\frac{2\,(3\,s^2-1)}{(s^2+1)^3}$$

```
> laplace(y(t)=t-exp(2*t),t,s);
```

$$laplace(y(t),t,s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s-2}$$

```
> laplace(diff(y(t),t)+y(t)=exp(t)*sin(2*t),t,s);;
```

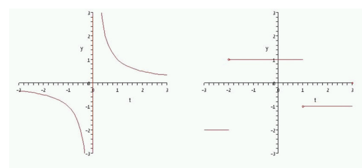
$$s\,laplace(y(t),t,s)-y(0)+laplace(y(t),t,s)=\frac{2}{s^2-2\,s+5}$$

```
> laplace(Heaviside(t-2)*sin(t),t,s);
```

$$\frac{\mathbf{e}^{(-2\,s)}\,(\cos(2)+\sin(2)\,s)}{s^2+1}$$

פונקציה רציפה בחלקים

- אומרים שהפונקציה f **רציפה בחלקים** בקטע I נתון אם היא מקיימת את התנאים הבאים:
  1. יש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות
  2. כל נקודת אי-רציפות היא נקודת קפיצה, ז"א שיש לפונקציה f בנקודת אי-רציפות שני גבולות חד-צדדיים סופיים.



אי-רציפות שאיננה קפיצה (סוג שני)   קפיצות ב- -2 וב- 1

משפט קיום

תהי f פונקציה רציפה בחלקים על הקטע $[0,\infty)$.
נניח שהיא מקיימת את אי-השוויון $|f(t)|\le Me^{at}$ אם $t\ge T$, כאשר a,M,T הם מספרים ממשיים לא שליליים נתונים.
אזי $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$ קיימת ומוגדרת לכל $s>a$.

- דוגמא:

א. נתון $f(t)=e^t$. תנאי משפט הקיום מתקיימים: קחו $a=1, M=1$ ו- $T=0$. לכן יש התמרת לפלס לפונקציה הנתונה. את החישוב עשינו לעיל.

עוד דוגמא

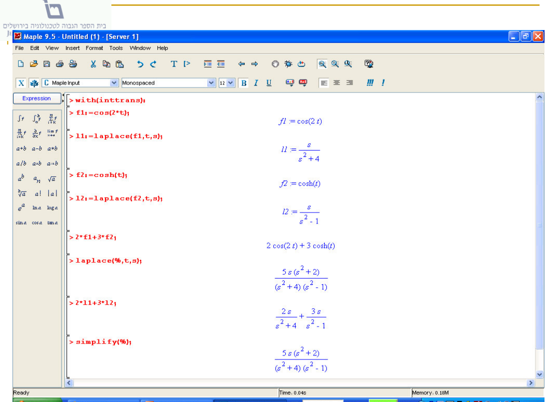
ב. נתון $f(t)=t^n$ כאשר n הוא מספר טבעי. נוכיח שלכל $t>0$, $f(t)\le n!e^t$.
בשביל זה נשתמש בטור מקלורין של הפונקציה המעריכית: $e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\ldots+\frac{1}{n!}t^n+\ldots$.
אם $t>0$, כל איברי הסכום חיוביים. מכאן ש- $e^t\ge\frac{t^n}{n!}$ ואי-השוויון המבוקש התקבל.
לכן יש התמרת לפלס לפונקציה הנתונה. את החישוב מבצעים בעזרת הוכחה באינדוקציה.

הלינאריות של התמרת לפלס

נתונות שתי פונקציות f ו- g של המשתנה הממשי t.
נניח שיש לשתי הפונקציות האלה התמרת לפלס.
אזי לכל שני מספרים ממשיים α ו- β, יש התמרת לפלס לפונקציה $\alpha f+\beta g$, ומתקיים:

$$\mathfrak{L}\{(\alpha f+\beta g)(t)\}(s)=\mathfrak{L}\{\alpha f(t)\}(s)+\mathfrak{L}\{\beta g(t)\}(s)$$

- דוגמא: בשקף הבא, בעזרת Maple



התמרת לפלס הפוכה

ניקח פונקציה f של המשתנה t שיש לה התמרת לפלס ונסמן $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)G(s) =$.

הפונקציה f תיקרא **התמרת לפלס הפוכה** של G. היא תסומן ב- $\mathfrak{L}^{-1}\{\ G(s)\ \}(t)$

לדוגמא $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t) = e^{2t}$.

פקודות Maple - 2

```
> with(inttrans);
> invlaplace(1/(s+1),s,t);
                                        e^(-t)
> invlaplace(2*s/(s^2+2*s+5),s,t);
                              e^(-t) (2 cos(2 t) - sin(2 t))
> invlaplace(exp(-2*s)/s^2,s,t);
                              Heaviside(t - 2) (t - 2)
> invlaplace(exp(-2*s)/s^2+2*exp(-3*s)/(s-1),s,t);
              Heaviside(t - 2) (t - 2) + 2 Heaviside(t - 3) e^(t - 3)
```

שימו לב: את הפונקציה המעריכית יש לסמן ב- exp

הלינאריות של התמרת לפלס הפוכה

התמרת לפלס הפוכה היא לינארית, כלומר בתנאים המתאימים, מתקיים:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\ (\alpha F+\beta G)(s)\ \}(s) = \mathfrak{L}^{-1}\{\alpha F(s)\}(t) + \mathfrak{L}^{-1}\{\ \beta G(s)\ \}(t).$$

- **דוגמא** :

נתון $F(s)=\frac{2s}{(s-1)(s-4)}$. על מנת לחשב את התמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$, נפרק את השבר לשברים פשוטים:

$$F(s)=\frac{8}{3(s-4)}-\frac{2}{3(s-1)} = F(s)=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s-4)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(s-1)}$$

ידוע ש- $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}(t)=e^{4t}$ וש- $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t)=e^{t}$. בגלל הלינאריות של ההתמרה ההפוכה מתקבל:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}(t)=\frac{8}{3}e^{4t}-\frac{2}{3}e^{t}.$$

עוד דוגמא של התמרת לפלס הפוכה

נתון $F(s)=\frac{2s+1}{s^2+9}$. נפרק את השבר לסכום של שני שברים:

$$F(s)=\frac{2s}{s^2+9}+\frac{1}{s^2+9}$$

האיבר הראשון דומה להתמרת לפלס של cos, השני דומה להתמרת לפלס של sin. דרושות רק התאמות קטנות של המקדמים:

$$F(s)=\frac{2s}{s^2+9}+\frac{1}{s^2+9}=2\cdot\frac{s}{s^2+9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

ובגלל הליניאריות של התמרת לפלס ההפוכה מתקבל:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}(t)=2\ \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}(t)+\frac{1}{3}\ \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t)$$

$$=2\sin 3t+\frac{1}{3}\cos 3t.$$

דוגמאות נוספות

- דוגמא 1: $F(s)=\frac{4s-1}{s^2-5x+6}$
- דוגמא 2: $F(s)=\frac{2s+16}{s^2+4s+13}$

משפט הזזה ראשון

נניח ש- $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=F(s)$ קיימת עבור $s>b$.
אם a הוא מספר ממשי נתון, אזי
$\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a),\ s>a+b.$

- דוגמא:

ידוע ש- $\mathfrak{L}\{\sin 2t\}(s)=\frac{2}{s^2+4}$.

לכן $\mathfrak{L}\{e^{5t}\sin(2t)\}(s)=\frac{2}{(s-5)^2+4}$.

התמרת לפלס של הנגזרת ראשונה של פונקציה

נניח ש:

א. הפונקציה $f(t)$ מקיימת את תנאי משפט הקיום (נשתמש בסימונים של המשפט ההוא);

ב. הפונקציה f גזירה ו- f' רציפה בחלקים על הקטע $[0,+\infty)$.

אזי: יש התמרת לפלס עבור הפונקציה f', ומתקיים:

$$\mathfrak{L}\{ f'(t) \}(s) = s\,\mathfrak{L}\{ f(t)\}(s) - f(0),\ s>a$$

- דוגמא:

אם $f(t)=\sin t$, אזי $f'(t)=\cos t$. ידוע ש-

$$\mathfrak{L}\{ \sin t \}(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{ו-} \quad \mathfrak{L}\{ \cos t \}(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

אכן מתקיים:

$$\frac{s}{s^2+1} = s\,\frac{1}{s^2+1} - \sin 0.$$

יישום

- חשב את התמרת לפלס הפוכה של הפונקציה הנתונה להלן:

$$F(s) = \ln\frac{s+2}{s-5}$$

רמז: אפשר לגזור משהו?

התמרת לפלס של הנגזרת מסדר n של פונקציה נתונה

נניח ש:

א. הפונקציה $f(t)$ גזירה לפחות n פעמים כאשר $t \geq 0$

ב. כל הנגזרות $f^{(k)}(t)$ מקיימות את תנאי משפט הקיום (כאשר $k=0,1,2,\ldots,n-1$)

ג. הנגזרת $f^{(n)}(t)$ רציפה בחלקים על הקטע $[0,+\infty)$.

אזי יש התמרת לפלס עבור $f^{(n)}(t)$ ומתקיים:

$$\mathfrak{L}\{ f^{(n)}(t) \}(s) = s^n\,\mathfrak{L}\{ f(t) \}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

- דוגמא:

אם $f(t)=\sin t$, אזי $f^{(4)}(t)=\sin t$ ואכן:

$$\mathfrak{L}\{ \sin t \}(s) = \frac{1}{s^2+1} = s^4\,\mathfrak{L}\{ \sin t \}(s) - s^3 \sin 0 - s^2 \cos 0 + s \sin 0 + \cos 0$$

פתרון משוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלתי בעזרת התמרת לפלס

1. נתונה משוואה דיפרנציאלית שבה הנעלם הוא $y(t)$.
2. ע"י המרת לפלס של שני האגפים של המשוואה
3. מקבלים משוואה אלגברית בעלת נעלם $Y(s)$
4. מבצעים שינויים בעזרת כללים אלגבריים (פירוק לשברים פשוטים וכו'), על מנת לכתוב את $Y(s)$ כצירוף לינארי של "שברים ידועים".
5. ע"י התמרת לפלס הפוכה, מוצאים את $y(t)$.

דוגמא

מצא את הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $y''(t)-9y(t)=0$ עם התנאי ההתחלתי $y(0)=0, y'(0)=1$.

א.

$$\mathfrak{L}\{ y''(t)-9y(t) \}=0$$

$$s^2\, \mathfrak{L}\{y(t)\}(s) - s\,y'(0) - y(0) - 9\,\mathfrak{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 9Y(s) = 0$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-9}.$$

ב. נפרק את $Y(s)=\frac{1}{s^2-1}$ לשברים פשוטים:

$$Y(s)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s-3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+3}$$

ג. הפתרון:

$$y(t)=\frac{1}{6}\,\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t)-\frac{1}{6}\,\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)=\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{6}e^{-3t}.$$

דוגמאות נוספות

$$\begin{cases} y''-y=t-2 \\ y(2)=3,\ y'(2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}+5y=e^{-t} \\ y(0)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''-y''+y'-y=0 \\ y(0)=y'(0)=1,\ y''(0)=3 \end{cases}$$

פונקצית היביסייד (Heaviside)
unit-step function

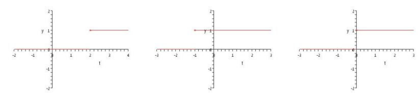
- **פוקצית היביסייד (Heaviside):**

נסמן אותה באות u. היא מוגדרת ע"י
$$\begin{cases} u(t)=0, t<0 \\ u(t)=1, t\geq 0 \end{cases}$$

- **פונקצית Heaviside מוזזת:**

$$\begin{cases} u(t-a)=0, t<a \\ u(t-a)=1, t\geq a \end{cases}$$

- גרפים:

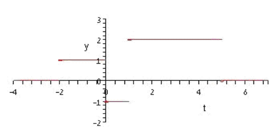


Oliver Heaviside
1925 - 1850

פונקציה במדרגות

היא פונקציה f המקיימת את התנאים הבאים:

- היא רציפה בכל התחום שלה, פרט לקבוצה דיסקרטית של נקודות אי-רציפות (בעצם קפיצות).
- בין שתי נקודות אי-רציפות, הפונקציה קבועה.



התמרת לפלס של פונקצית Heaviside (מוזזת או לא)

$$\mathfrak{L}\left\{u(t-a)\right\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt=\int_a^\infty e^{-st}\,dt=\frac{e^{-as}}{s}$$

דוגמאות של שאלות שונות:

בטאו את הפונקציה הנתונה בעזרת פונקצית Heaviside וחישבו את התמרת לפלס שלה.

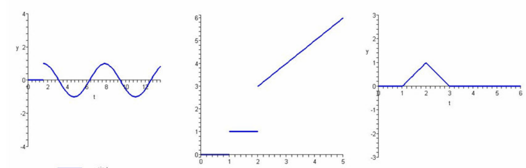
א. $g(t)=\begin{cases}0, & 0<t<1\\ 1, & 1<t<2\\ -2, & t>2\end{cases}$

ב. $g(t)=\begin{cases}0, & 0<t<3\\ t+1, & t>3\end{cases}$

ג. הפונקציה נתונה ע"י הגרף (ב)

ד. הפונקציה נתונה ע"י הגרף (א).

ה. הפונקציה הנתונה ע"י הגרף (ג).



(ג) (ב) (א)

יישום – פתרון משוואה דיפרנציאלית

- דוגמא 1: $\begin{cases}w''-w=u(t)+u(t-2)\\ w(0)=1,\ w'(0)=2\end{cases}$
- דוגמא 2: $\begin{cases}y''+y=g(t)\\ y(0)=-1,\ y'(0)=0\end{cases}$ כאשר $g(t)=\begin{cases}t, & t<2\\ 5, & t>2\end{cases}$

משפט הזזה שני

יהי $a>0$. אם ל- $f(t)$ יש התמרת לפלס, אזי ל- $f(t)u(t-a)$ יש התמרת לפלס ומתקיים:

$$\mathfrak{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\ \mathfrak{L}\{f(t)\}(s).$$

- דוגמא:התמרת לפלס של פונקציה עם קפיצה אחת

נתון $f(t)=\begin{cases} t^2, 0\le t<2\pi \\ t^2+\sin t, t\ge 2\pi \end{cases}$.

לפונקציה הזאת נקודת קפיצה ב- π. ניתן לכתוב:

$$f(t)=u(t)t^2+u(t-2\pi)\sin t = u(t)t^2+u(t-2\pi)\sin(t-2\pi).$$

עפ"י משפט ההזזה השני מתקבל:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

התמרת לפלס -פ -נח ד 'פרופ (c) 31

פונקציות מחזוריות

תהי $f(t)$ פונקציה רציפה בחלקים בקטע $[0,T]$ ומחזורית בעלת מחזור השווה ל- T.
אזי יש ל- $f(t)$ התמרת לפלס, והיא נתונה ע"י הנוסחה הבאה:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

דוגמא:

לחשב את התמרת לפלס של הפונקציה המוגדרת ע"י $f(t)=\begin{cases} \cos t, & 2\pi k\le t<(2k+1)\pi \\ -\cos t, & (2k+1)\pi\le t<(2k+2)\pi \end{cases}$.

שימו לב למחזוריות של הפונקציה.

הפונקציה f רציפה על R כולו ובעלת מחזור השווה ל-π. לכן

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=\frac{\int_0^\pi e^{-st}\cos t\,dt}{1-e^{-\pi s}}=\frac{1}{1-e^{-s\pi}}\left(\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$=\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}\coth\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

התמרת לפלס -פ -נח ד 'פרופ (c) 32

טבלה קצרה של התמרות לפלס

$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$		$e^{at}\sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$		$e^{at}\cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$		$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$		$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s>\|a\|$		$\sin at - at\cos at$	$\sin at - at\cos at$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s>\|a\|$		$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$		$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$			

התמרת לפלס -פ -נח ד 'פרופ (c) 33

פתרון משוואה דיפרנציאלית בעזרת התמרת לפלס (כאילו ידנית)

```
> with(inttrans):
> ode:=diff(y(t),t)+y(t)=Heaviside(t-2);
```

$$ode := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = \text{Heaviside}(t-2)$$

```
> laplace(ode,t,s);
```

$$s\,laplace(y(t),t,s) - y(0) + laplace(y(t),t,s) = \frac{e^{(-2s)}}{s}$$

```
> solve(%,laplace(y(t),t,s));
```

$$\frac{y(0)\,s + e^{(-2s)}}{s\,(s+1)}$$

```
> invlaplace(%,s,t);
```

$$y(0)\,e^{(-t)} + \text{Heaviside}(t-2)\,(1 - e^{(-t+2)})$$

פתרון אותה משוואה דיפרנציאלית בעזרת הפקודה dsolve

```
> restart;with(inttrans):
> ode:=diff(y(t),t)+y(t)=Heaviside(t-2);
```

$$ode := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = \text{Heaviside}(t-2)$$

```
> dsolve(ode);
```

$$y(t) = \text{Heaviside}(t-2) - \text{Heaviside}(t-2)\,e^{(-t+2)} + e^{(-t)}\,\_C1$$

```
> ini:=y(0)=3;
```

$$ini := y(0) = 3$$

```
> dsolve({ode,ini},y(t));
```

$$y(t) = \text{Heaviside}(t-2) - \text{Heaviside}(t-2)\,e^{(-t+2)} + 3\,e^{(-t)}$$

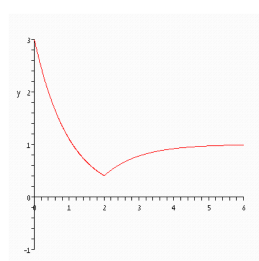
שימו לב: בשקף הקודם, לא היה תנאי התחלתי. כאן פעם אין, פעם יש תנאי התחלתי.

התנאי ההתחלתי קובע מקדם מסוים. מי הוא?

פתרון ושרטוט עקומה אינטגרלית

```
restart: with(inttrans):
> ode:=diff(y(t),t)+y(t)=Heaviside(t-2);ini:=y(0)=3;
> dsolve(ode);
> dsolve({ode,ini},y(t));
> sol:=unapply(rhs(%),t);
> plot(sol,0..6,y=-1..3,numpoints=800);
```

שימו לב לנקודת החוד



לפעמים צריך לנתח יותר את מה שכותבים: מה קרה כאן?

```
> with(inttrans):
> ode:=diff(y(t),t)+y(t)=abs(sin(t));
```

$$ode := \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = |\sin(t)|$$

```
> laplace(ode,t,s);
```

$$s\,laplace(y(t), t, s) - y(0) + laplace(y(t), t, s) = \frac{\coth\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}{s^2+1}$$

```
> solve(%,laplace(y(t),t,s));
```

$$\frac{y(0)\,s^2 + y(0) + \coth\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}{s^3+s+s^2+1}$$

```
> invlaplace(%,s,t);
```

$$-\frac{1}{2}invlaplace\left(\frac{\coth\left(\frac{1}{2}\pi s\right)s}{s^2+1}, s, t\right) + \frac{1}{2}invlaplace\left(\frac{\coth\left(\frac{1}{2}\pi s\right)}{s^2+1}, s, t\right) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{Dirac}(t)\,e^{(-2t)} + (4 + (\cos(t) - \sin(t))\,\mathrm{Dirac}(t))\,e^{(-t)}\right)y(0)$$

התמרת לפלס של פונקצית Dirac

```
> diff(Heaviside(x),x);
```

$$\mathrm{Dirac}(x)$$

```
> int(Dirac(t),t=-infinity..x);
```

$$\mathrm{Heaviside}(x)$$

```
> diff(Dirac(x),x);
```

$$\mathrm{Dirac}(1, x)$$

```
> laplace(Dirac(t-a),t,s);
```

$$\begin{cases} e^{(-s\,a)} & 0 \le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

חומרים נוספים

- באתר e-learn של הקורס:
  - תקציר התאוריה
  - דוגמאות נוספות (מדרגות עולות אינסופיות, גלים בעלי צורות שונות כגון גל מרובע אינסופי וכו')
  - קישור לפרק בקורס ממוחשב המבוסס על Maple
- ב-help של Maple, ראו advisor
- טבלאות מעניינות:

http://www.vibrationdata.com/Laplace.htm

http://www.math.udel.edu/~rluke/teach/352/notes/LaplaceTable.pdf