מבוא למערכות משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

פרופ' נח דנא-פיקארד
ניסן תשס"ט

מערכת משוואות מסדר ראשון - פתרון

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

- פתרון של מערכת המשוואות הדיפרנציאליות הזאת היא n – איית פונקציות גזירות כך שהצבתן במערכת המשוואות הופכת את זאת לזהות.

דוגמא

מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

שני פתרונות:

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = 2e^{2t} \end{cases}$$

מא: המודל של Lotka-Volterra עבור טורף-נטרף

- ארנבות בהעדר שועלים:

$$\frac{dR}{dt}=aR, a>0$$

- שועלים בהעדר ארנבות:

$$\frac{dF}{dt}=-cF, c>0$$

- כשנפגשים:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt}=aR-bRF \\ \frac{dF}{dt}=-cF+gRF \end{cases}, a,b,c,g>0$$

כאשר *F(t)* = אוכלוסית שועלים
ו- *R(t)*= אוכלוסית ארנבות
בזמן *t*.

כיצד פותרים את המודל של Lotka-Volterra? אנליזה במישור פזה

- מבטלים את t ומפרידים משתנים:

$$\begin{cases} dt=\frac{dR}{R(a-bF)} \\ dt=\frac{dF}{-F(c-gR)} \end{cases}$$

פותרים משוואה פרידה:

$$\frac{dR}{R(a-bF)}=\frac{dF}{-F(c-gR)}$$

הפתרון הכללי:

$$a\ln F-bF=-c\ln R+gR+C, C\in\mathbf{R}$$

דוגמא: המודל של Volterra עבור טורף-נטרף

- המערכת:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt}=2R-1.2RF \\ \frac{dF}{dt}=-F+0.9RF \end{cases}$$

כאשר *F(t)* = אוכלוסית שועלים
ו- *R(t)*= אוכלוסית ארנבות
בזמן *t*.

נקודות שווי משקל

- נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

נקודת שווי משקל היא נקודה ב- $\mathbf{R}^n$ כך ש-

$$\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$$

7

(C) פרופ' נח ד-פ

מקרה פרטי: משוואות ליניאריות

- נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

- אפשר לכתוב אותה בצורה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- הראשית (0,0,…,0) היא נקודת שווי משקל היחידה אם, ורק אם, $|A| \neq 0$

8

(C) פרופ' נח ד-פ

נקודת שווי משקל של המודל של Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = 0 \\ \frac{dF}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2R - 1.2RF = 0 \\ -F + 0.9RF = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(2 - 1.2F) = 0 \\ F(-1 + 0.9R) = 0 \end{cases}$$

כלומר: $R \equiv 0, \ F \equiv 0$

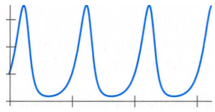
או $R \equiv \frac{1}{0.9} \approx 1.11, \ F \equiv \frac{2}{1.2} \approx 1.67$

9

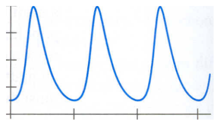
(C) פרופ' נח ד-פ

גרפים נפרדים
של הפונקציות המרכיבות את הפתרון

- הגרף של *R*



- הגרף של *F*

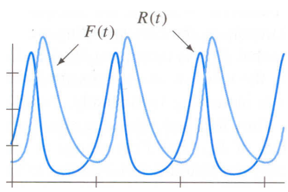


כאשר $R(0)=1,\ F(0)=0.5$

10

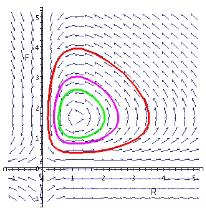
שני הגרפים ביחד

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF \\ \dfrac{dF}{dt} = -F + 0.9RF \end{cases}$$



11

Phase portrait

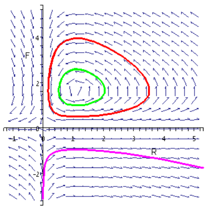


- תנאים התחלתיים:
  - אדום: $R(0)=1,\ F(0)=0.5$
  - סגול: $R(0)=1,\ F(0)=1$
  - ירוק: $R(0)=2,\ F(0)=1$
- פקודת Maple:
- המישור (R,F) נקרא **מישור פזה**

12

מקרה חסר משמעות

- סגול: $R(0)=2,\ F(0)=-1$



13

פרופ' נח ד-פ (C)

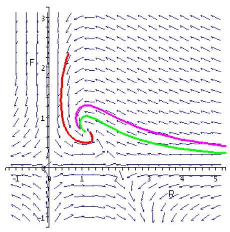
טורף-נטרף: מודל שני (לוגיסטי)

- המערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = R(2-R-1.2F) \\ \dfrac{dF}{dt} = -F+0.9RF \end{cases}$$

- עבור אותם תנאים התחלתיים
- נקודת שיווי משקל:

$$\left(\frac{10}{9},\frac{20}{27}\right) \approx (1.11, 0.74)$$



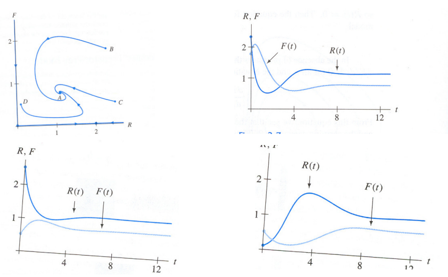
14

פרופ' נח ד-פ (C)

גרפים נפרדים של הפונקציות המרכיבות את הפתרון לפי המיקומים

B

C D



15

פרופ' נח ד-פ (C)

מערכות משוואות דיפרנציאליות ליניאריות לא מצומדות לחלוטין (completely decoupled systems)

- מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

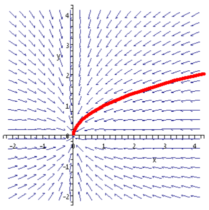
- פתרון כללי:

$x(t) = C_1 e^{-2t}, C_1 \in R$

$y(t) = C_2 e^{-t}, C_2 \in R$

- תנאי התחלה:

$x(0)=1,\ y(0)=1$



16

פרופ' נח ד-פ (C)

מערכות משוואות דיפרנציאליות ליניאריות לא מצומדות (decoupled systems)

- מערכת המשוואות:

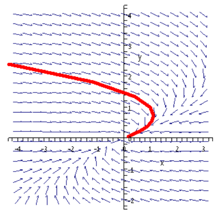
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x+3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

- פתרון כללי:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-t} \\ y(t) = C_2 e^{-t} \end{cases}, C_1, C_2 \in R$$

- תנאי התחלה:

$x(0)=1,\ y(0)=1$



17

פרופ' נח ד-פ (C)

התנהגויות שונות מסביב לנקודות שווי משקל דוגמא 1

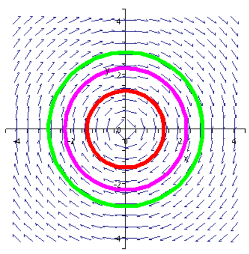
- המערכת

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

- הפתרון הכללי:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y(t) = C_2 \cos t + C_1 \sin t \end{cases}; C_1, C_2 \in R$$

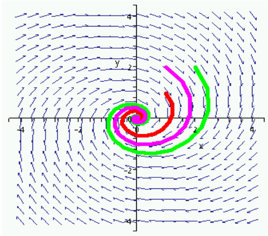
- תנאים התחלתיים:
  - $x(0)=1,\ y(0)=1$
  - $x(0)=2,\ y(0)=2$
  - $x(0)=1,\ y(0)=2$



18

פרופ' נח ד-פ (C)

התנהגויות שונות מסביב לנקודות שווי משקל דוגמא 2



- המערכת
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$$
- תנאים התחלתיים:
  - $x(0)=1,\ y(0)=1$
  - $x(0)=2,\ y(0)=2$
  - $x(0)=1,\ y(0)=2$
- הפתרון הכללי:

$$x(t) = -\frac{2}{3} e^{(-t)} \sqrt{3}\,(\_C1 \cos(2\sqrt{3}\,t) - \_C2 \sin(2\sqrt{3}\,t)),\ y(t) = e^{(-t)}\,(\_C1 \sin(2\sqrt{3}\,t) + \_C2 \cos(2\sqrt{3}\,t))$$

דוגמא: תנועת מסה נקודתית המחוברת לקפיץ harmonic oscillator

- משוואה כשאין חיכוך: $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\,y$
- משוואה עם חיכוך: $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\,y - b\frac{dy}{dt}$

דהיינו $m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + b\frac{dy}{dt} = 0$

m= המסה , k=פרמטר התלוי במאפיינים הפיזיים של הקפיץ, b=מקדם החיכוך

כיצד פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית הלינארית מסדר שני הנ"ל בעזרת מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

נציב $p = \frac{b}{m},\ q = \frac{k}{m}$

ונקבל $\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0$

נסמן $v = \frac{dy}{dt}$

ובסוף מקבלים מערכת משוואות דיפרנציאליות
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -pv - qy \end{cases}$$

מערכות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון

תהי $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y}$ מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות.

א. אם $\boldsymbol{y}(t)$ הוא פתרון של המערכת ו k קבוע כלשהו אזי $k\,\boldsymbol{y}(t)$ הוא גם פתרון.

ב. אם $\boldsymbol{y}_1(t)$ ו $\boldsymbol{y}_2(t)$ הם שני פתרונות של המערכת אז $\boldsymbol{y}_1(t)+\boldsymbol{y}_2(t)$ הוא גם פתרון.

נאחד את א. ו ב.

אם $\boldsymbol{y}_1(t)$ ו $\boldsymbol{y}_2(t)$ הם שני פתרונות של המערכת ואם k_2, k_1 קבועים כלשהם אזי $k_1\,\boldsymbol{y}_1(t)+k_2\,\boldsymbol{y}_2(t)$ הוא גם פתרון. פתרון זה נקרא קומבינציה לינארית של הפתרונות $\boldsymbol{y}_1(t)$ ו $\boldsymbol{y}_2(t)$.

22

פרופ' נח ד-פ (C)

מערכות משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון: דוגמאות

- מערכת המשוואות: $\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$
- שני פתרונות: $\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $\boldsymbol{y}_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}$
- לכן לכל שני מספרים ממשיים A_1, A_2 , $A_1 y_1(t)+A_2 y_2(t)$ הוא גם פתרון .

23

פרופ' נח ד-פ (C)