מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרופ' נח דנא-פיקארד
בית ספר גבוה לטכנולוגיה
אדר תשס"ט

URL

- http://ndp.jct.ac.il/COURSES_HP/ODE.html

מהי משוואה דיפרנציאלית רגילה?

- משוואה דיפרנציאלית היא משוואה המכילה נגזרות או דיפרנציאלים של פונקציה (נעלמת) f לפי משתנה אחד או לפי מספר משתנים בלתי תלויים.
- אם הפונקציה f היא פונקציה של משתנה אחד, המשוואה הדיפרנציאלית היא רגילה.
$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$
- אחרת היא משוואה דיפרנציאלית חלקית.

דוגמאות

- משוואות דיפרנציאליות רגילות:

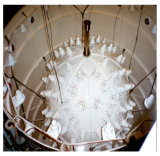
$$y'-2y=\sin t$$

$$(2x+y)dx-(3x+y^2)dy=0$$

$$x^2y''+xy'-4y=e^{2x}$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

דוגמא: רדיואקטיביות



- חומר רדיואקטיבי מתפרק בקצב פרופורציונלי לכמות החומר

$$\frac{dQ}{dt}=-t\,Q(t)$$

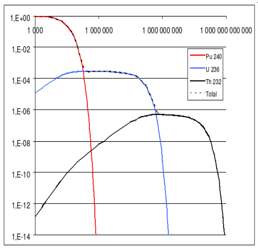
כאשר $r>0$ הוא פרמטר ספציפי לחומר הנתון.

דוגמא: פחמן-14: $r = 1.24410^{-1}$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

התפרקות רדיואקטיבית

Plutonium 240 → Uranium 236 → Thorium 232



- מחזור (חצי חיים?)

$Pu_{240} \rightarrow$ 6560 years

$U_{236} \rightarrow 23.42\ .10^{6}$ years

$Th_{232} \rightarrow 14.05\ .10^{9}$ years

משוואות דיפרנציאליות רגילות

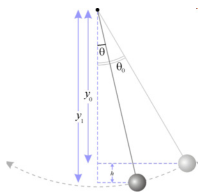
השתנות אוכלוסיה

- המודל המעריכי: $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k\,P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}$
- המודל הלוגיסטי (Verhulst-Pearl model):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k\,P\left(1 - \frac{P}{M}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \Rightarrow P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + \left(M - P_0\right)e^{-kt}}$$

M הוא גודל גבולי של האוכלוסיה (carrying capacity)

מטוטלת



התמונה מ-Wikipedia

- משוואת מטוטלת:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- ראה גם

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/HBASE/pend.html

משוואות דיפרנציאליות חלקיות:

- משוואת החום בחומר חד-מימדי: $u_t = \alpha u_{xx}$
- משוואת לפלס (מרחב דו-מימדי): $u_{xx} + u_{yy} = 0$

הפתרונות נקראים פונקציות הרמוניות

- משוואת הגלים בחומר חד-מימדי: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

לדוגמא שינויי לחץ גז בתוך צינור, שינויי מגניטודה של שדה מגנטי בצינור

הסדר של משוואה דיפרנציאלית

- הסדר של משוואה דיפרנציאלית הוא סדר הנגזרת בעלת הסדר הגבוה ביותר המופיעה במשוואה:
- סדר 1 $y'+2xy=x^2$
- סדר 2 $y''+x^2y^3=\sin 2t$
- סדר 4 $xy^{(4)}+y''-2y=0$
- סדר 2 $(y'')^3+xy'-y=x\sin x$

משוואה דיפרנציאלית לינארית

- משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

- המקדמים $a_i(x), f(x)$ נתונים ו $a_n(x)$ איננה פונקצית האפס.

דוגמאות

- לינארית: $y''+xy=\sin x$
- לינארית: $x^3y'''+xy'-2y=xe^x$
- לא לינארית: $(y')^2+y=0$
- לא לינארית: $(2x-y)dx+(x+y)dy=0$

פתרון של משוואה דיפרנציאלית רגילה

- פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית מסדר n הבאה
  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
- על הקטע (a,b) הוא פונקציה $\phi(x)$ רציפה על (a,b) וגזירה n פעמים על (a,b) כך ש -

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in (a,b)$$

דוגמאות

- $y(x) = e^{3x}$ היא פתרון של $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$
-
- $y(x) = 2\cos 3x$ היא פתרון של $y'' + 9y = 0$
-
- $y(t) = t^2 \ln t, t > 0$ היא פתרון של $t^2 y'' - 3t y' + 4y = 0$

פתרון כללי

- למשוואה דיפרנציאלית רגילה אוסף פתרונות היכול להיות אינסופי, תלוי במספר פרמטר.
- הקבוצה הזאת נקראת פתרון כללי של המשוואה הדיפרנציאלית
- דוגמאות:

משוואה דיפרנציאלית	פתרון כללי
$y'(t) = 3y(t) + t$	$y(t) = Ae^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}, A \in \mathbf{R}$
$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$	$y(t) = A_1 e^{-t}\cos 2t + A_2 e^{-t}\sin 2t, A_1, A_2 \in \mathbf{R}$

פתרון סינגולרי

- אם פתרון מסוים של המשוואה הדיפרנציאלית איננו מתקבל עבור ערך מסוים של המקדמים השרירותיים, קוראים לו פתרון סינגולרי:
- דוגמא: $y(x)=\frac{1}{x^2+k}, k\in \mathbf{R}$ מגדירה משפחת פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית $y'=-2xy^2$
- פתרון סינגולרי : $y=0$

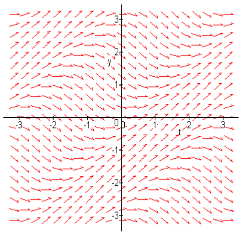
משוואה עם תנאי התחלתי:

- דוגמא 1 : $\begin{cases} y'-2y=0 \\ y(1)=e \end{cases}$
-
- דוגמא 2: $\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=2; y'(0)=-1 \end{cases}$
- דוגמא 3: $\begin{cases} y''+4y=\sin t \\ y(\pi)=1; y'(\pi)=0 \end{cases}$

משוואה עם תנאי שפה:

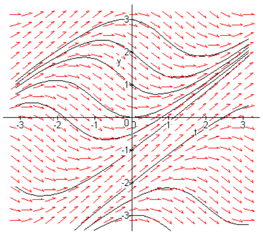
- דוגמא 1 : $\begin{cases} y''-2y=0 \\ y(1)=e; y(2)=e^2 \end{cases}$
-
- דוגמא 2: $\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=2; y(5)=-1 \end{cases}$
- דוגמא 3: $\begin{cases} y''+4y=\sin t \\ y(0)=1; y(\pi)=0 \end{cases}$

שדה כוונים



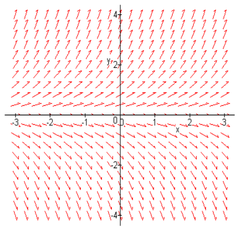
$$y'(t)=\sin(t-y)$$

שדה כוונים עם תנאי התחלתי



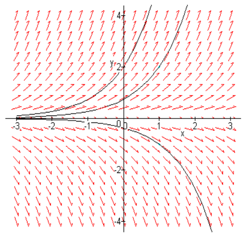
$$y'(t)=\sin(t-y)$$
$$y(0)=3$$
$$------$$
$$y(0)=2$$
$$etc$$

שדה כוונים: שפוע = שיעור y



$$y'(x)=y(x)$$

שדה כוונים: שפוע = שיעור y
עם תנאי התחלתי



$y' = y$

$y(1) = 2$

$y(1) = -1$

$y(0) = 2$

המשך יבוא, בע"ה

- הקריקטורה של אייזק ניוטון היא פרי עתו של מרסל גוטליב, הו"ל דרגו, פריז.