פונקציות מרוכבות תשס"ט תרגיל 1- פתרון

שאלה 3

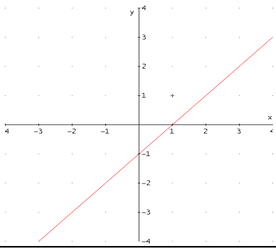
ג-המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים: $\frac{z-1}{z+i}$ ממשי

כאשר : $z=x+iy$:

$$\frac{z-1}{z+i}=\frac{(x+iy)-1}{(x+iy)+i}=\frac{(x-1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$$

לכן: $\left\{z=x+iy \,\middle|\, \frac{z-1}{z+i}\in IR\right\}=\left\{z=x+iy \middle| -x+y+1=0 \quad z\neq -i\right\}$

מסקנה: המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים: $\frac{z-1}{z+i}$ ממשי הוא הישר: $-x+y+1=0$ חוץ מהנקודה $(0,-1)$.



ד-המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים: $\frac{z-1}{z+i}$ מדומה טהור

כאשר $z=x+iy$:

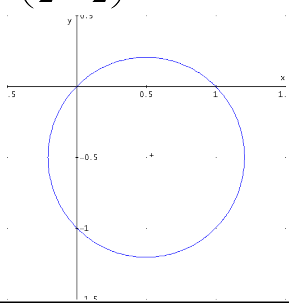
$$\frac{z-1}{z+i}=\frac{(x+iy)-1}{(x+iy)+i}=\frac{(x-1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$$

לכן:

$$\left\{z=x+iy \,\middle|\, \frac{z-1}{z+i}\in iIR\right\}=\left\{z=x+iy \middle| x^2-x+y^2+y=0 \quad z\neq -i\right\}$$

$$=\left\{z=x+iy \middle| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \quad z\neq -i\right\}$$

מסקנה: המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים: $\frac{z-1}{z+i}$ מדומה טהור המעגל עם רדיוס $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ומרכז $\Omega=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ חוץ מהנקודה $(0,-1)$.



ה-המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים:

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-i|$$

כאשר $z=x+iy$:

$$|z|^2=x^2+y^2 \qquad |z-i|^2=x^2+(y-1)^2 \qquad \left|\frac{1}{z}\right|^2=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

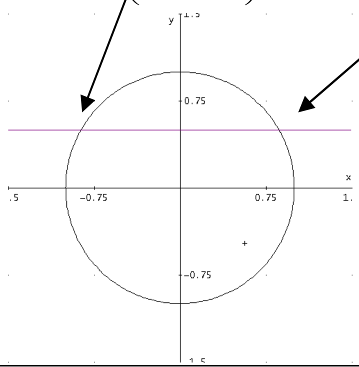
$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-i| \Leftrightarrow |z|^2=\left|\frac{1}{z}\right|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{x^2+y^2}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 0=-2y+1 \\ x^2+y^2=1\end{matrix}\right\}$$

מסקנה:

המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים: $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-i|$

הוא נקודת חיתוך של המעגל עם רדיוס $r=1$ ומרכז $\Omega=(0;0)$ עם הישר $y=\frac{1}{2}$.

ז"א הנקודות $A=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ $B=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$



ו- המקום הגיאומטרי של התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים המקיימים:

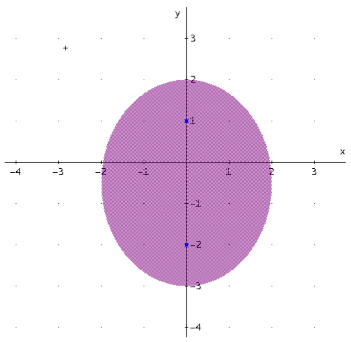
$$|z-i|+|z+2i|\le 5$$

תזכורת: אליפסה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר סכום מרחקיהן אל שני נקודות F_1 ו- F_2 **(מוקדים)** הוא מספר קבוע. $MF_1+MF_2=a$

תהי הנקודות $F_1=(0,1)$ $F_2=(0,-2)$

המקום הגיאומטרי המבוקש הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות M במישור כך ש: $MF_1+MF_2\le 5$

ז"א: **הפנים של האליפסה** עם מוקדים $F_1=(0,1)$ $F_2=(0,-2)$



☙ שאלה 7 ❧

ה- פתור את המשוואה: $iz^2-(7+2i)z+1-13i=0$

לפי נוסחת השורשים של משוואה ריבועית יש שתי פתרונות :

$$z_1=\frac{(7+2i)-\delta}{2i} \qquad z_2=\frac{(7+2i)+\delta}{2i}$$

☜ δ מסמן את אחד מהמספרים כך ש: $\delta^2=\Delta=(7+2i)^2-4i(1-13i)=-7+24i$

שלב 1:מציאת δ נרשום $\delta=a+ib$:

$$\delta^2=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab=-7+24i$$

אז: $\begin{cases}a^2-b^2=-7\\ 2ab=24\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^2-\left(\frac{12}{a}\right)^2=-7\\ b=\frac{12}{a}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^4+7a^2-144=0\\ b=\frac{12}{a}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^2=9\\ b=\frac{12}{a}\end{cases}$

מצאנו שני ערכים שונים ל δ $\delta=3+4i$ או $\delta=-3-4i$ אפשר להציב אחד מהם בנוסחת השורשים

$$z_1=\frac{(7+2i)-(3+4i)}{2i}=-1-2i$$
$$z_2=\frac{(7+2i)+(3+4i)}{2i}=3-5i$$

ו- פתור את המשוואה: $(1+i)z^2-(1+7i)z-4+6i=0$

לפי נוסחת השורשים של משוואה ריבועית יש שתי פתרונות :

$$z_1=\frac{(1+7i)-\delta}{2(1+i)} \qquad z_2=\frac{(1+7i)-\delta}{2(1+i)}$$

☜ δ מסמן את אחד מהמספרים כך ש: $\delta^2=\Delta=(1+7i)^2-4(1+i)(-4+6i)=-8+6i$

שלב 1:מציאת δ נרשום $\delta=a+ib$:

$$\delta^2=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab=-8+6i$$

אז: $\begin{cases}a^2-b^2=-8\\ 2ab=6\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^2-\left(\frac{3}{a}\right)^2=-8\\ b=\frac{3}{a}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^4+8a^2-9=0\\ b=\frac{3}{a}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}a^2=1\\ b=\frac{3}{a}\end{cases}$

מצאנו שני ערכים שונים ל δ $\delta=1+4i$ או $\delta=-1-3i$ אפשר להציב אחד מהם בנוסחת השורשים

$$z_1=\frac{(1+7i)-(1+3i)}{2(1+i)}=\frac{2i}{(1+i)}=1+i$$
$$z_2=\frac{(1+7i)+(1+3i)}{2(1+i)}=\frac{1+5i}{(1+i)}=3+2i$$