בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים (ע"ר)
JERUSALEM COLLEGE OF TECHNOLOGY

מכון לב
Lev Institute

מכון טל
Tal Institute

מכון נוה
Naveh Institute

מכון לוסטיג
Lustig Institute

פונקציות מרוכבות תשס"ט

תרגיל מס' 6 – פתרונות נבחרים

1. חשב את האינטגרל $\int_0^{1+4i} z\,dz$ לאורך העקומה שמשוואתה היא $y=4x^2$.

נקח פרמטריזציה של הקשת: $\begin{cases} x=t \\ y=4t^2 \end{cases}, t\in[0,1]$. אזי: $dz=(1+8t\,i)dt$ ו-

$I=\int_0^1 (t+4t^2 i)(1+8t\,i)dt=-\frac{15}{2}+4i$.

תוספת: החישוב של האינטגרל לאורך קטע של קו ישר?

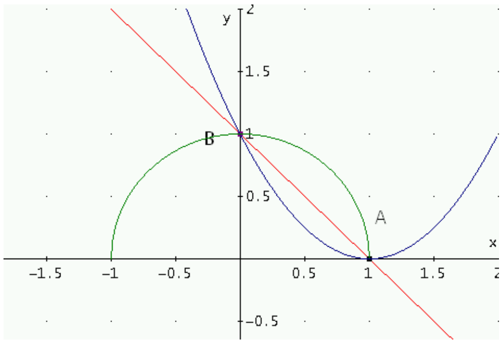
משוואת הישר העובר דרך הנקודות הנתונות (גבולות האינטגרציה) היא y=4x. נבחר פרמטריזציה: $\begin{cases} x=t \\ y=4t \end{cases}, t\in[0,1]$.

בצורה מרוכבת, פרמטריזציה של מסילת האינטגרציה היא $z=t+4t\,i, t\in[0,1]$. מכאן ש-

$I=\int_0^1 (t+4t\,i)(1+4i)dt=(1+4i)^2\int_0^1 t\,dt=(-15+8i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{-15}{2}+4i$.

הערה: קבלנו את אותה התוצאה בשני החישובים. אתם זוכרים למה?

2. חשב את האינטגרל $\int_1^{i} \bar{z}\,dz$ לאורך העקומה C הנתונה להלן:



א. C היא קטע של קו ישר.

נקח את הפרמטריזציה: $z=t+i(1-t), t\in[0,1]$.

מכאן האינטגרל:

$$\int_1^{i} \bar{z}\,dz=\int_0^1 (t-i(1-t))(1-i)dt=-i$$

ב. C היא קשת על הפרבולה שמשוואתה היא $y=(1-x)^2$.

נקח את הפרמטריזציה $z=t+i(1-t)^2, t\in[0,1]$. אזי:

$\int_1^{i} \bar{z}\,dz=\int_0^1 \left(t-i(1-t)^2\right)(1-2(1-t)i)dt=-\frac{2i}{3}$.

ג. C היא קשת של מעגל היחידה ברביע הראשון.

נקח את הפרמטריזציה $z=\cos t+i\sin t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. אזי $\int_1^{i} \bar{z}\,dz=\int_0^{\pi/2} (\cos t+i\sin t)(-\sin t+i\cos t)dt=-1$.

הערה: הסיבה לזה שהאינטגרלים שונים זה מזה: הפונקציה $z\mapsto \bar{z}$ איננה אנליטית בשום מקום, במיוחד לא באיזורים התחומים ע"י העקומות הנתונות.

3. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z}$ לאורך מעגל היחידה בחצי המישור העליון.

ב. $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z}$ לאורך מעגל היחידה בחצי המישור התחתון.

4. נתון $I=\int_0^{2+i} e^{z^2}\,dz$ לאורך קטע של קו ישר. בלי לחשב את האינטגרל באופן מפורש הוכח ש- $|I|\le\sqrt{5}\,e^3$.

רח' הוועד הלאומי 21, ת.ד. 16031, ירושלים 91160, מחלקת יחסי ציבור טל: 02-6751117, פקס: 02-6751190
21 Havaad Haleumi Street, POB 16031, Jerusalem 91160, ISRAEL, Tel: 972-2-6751117, Fax: 972-2-6751190

בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים (ע"ר)
JERUSALEM COLLEGE OF TECHNOLOGY

אורך הקטע הוא $\sqrt{5}$. צריכים להוכיח שעל הקטע הזה מתקיים $\left|e^{z^2}\right|\le e^3$. מקבלים את אי-השוויון המבוקש עפ"י משפט ML .

5. האם אפשר להשתמש במשפט Cauchy-Goursat כדי לחשב את האינטגרל הנתון?

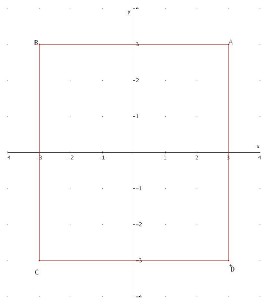
א. $\oint_{|z-3|=1}\frac{\cos z}{z+2}dz$ ב. $\oint_{|z|=1}\frac{\cosh z}{2z+1}dz$ ג. $\oint_{|z|=\pi}\frac{dz}{1+e^z}$ ד. $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{1-e^z}$

א. בעזרת משפטים "כלליים" מוכיחים שהפונקציה $z\mapsto\frac{\cos z}{z+2}$ אנליטית ב- $\mathbf{C}-\{-2\}$. הנקודה 2- מחוץ למעגל שעליו יש לחשב את האינטגרל. לכן תנאי משפט קושי-גורסה מתקיימים והאינטגרל הזה שווה ל-0.

ב. נקודת אי-האנליטיות 1/2- פנימית למעגל שעליו יש לחשב את האינטגרל. לכן תנאי משפט קושי-גורסה לא מתקיימים כאן.

6. בשאלות האלה, הלולאה C היא הריבוע שקודקודיו הם התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים $3+3i,-3+3i,-3-3i,3-3i$
(נסמן את הנקודות ב- A,B,C,D בהתאמה)
חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\oint_C\frac{dz}{z-1-i}$ ב. $\oint_C\frac{\sin z\,dz}{(z-1-i)^4}$ ג. $\oint_C\frac{dz}{z^2+4}$ ד. $\oint_C\frac{e^z dz}{z^2-2z+1+2i}$



עלינו לבדוק את המיקום של נקודות האי-אנליטיות של הפונקציה הנתונה באינטגרל.

א. הפונקציה הכתובה באינטגרל היא פונקציה רציונלית. לכן היא אנליטית בכל נקודה פרט לשורש (או שרשים) של המכנה. כאן הפונקציה אנליטית ב- C-{1+i}. הנקודה הנ"ל נמצאת בתוך הריבוע ABCD. נשתמש בנוסחת האינטגרל של קושי.

$$\oint_C\frac{dz}{z-1-i}=\oint_C\frac{1}{z-(1+i)}dz=2\pi i\cdot 1\Big|_{z=1+i}=2\pi i$$

כמובן, היה אפשר להשתמש בפרמטריזציה.

ב. כאן משתמשים בהכללה של נוסחת האינטגרל של קושי.

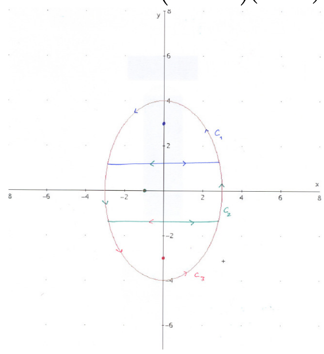
$$\oint_C\frac{\sin z\,dz}{(z-1-i)^4}=\frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(\sin z)\Big|_{z=1+i}=-\frac{\pi i}{3}\sin(1+i)$$

בכתיבה בצורה אלגברית מתקבל $\oint_C\frac{\sin z\,dz}{(z-1-i)^4}=\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)\sin 1+i\left(e-e^{-1}\right)\cos 1$.

רח' הוועד הלאומי 21, ת.ד. 16031, ירושלים 91160, מחלקת יחסי ציבור טל: 02-6751117, פקס: 02-6751190
21 Havaad Haleumi Street, POB 16031, Jerusalem 91160, ISRAEL, Tel: 972-2-6751117, Fax: 972-2-6751190

7. חשב את האינטגרלים הבאים:

ד. $\oint_C \frac{\cos z+\sin z}{\left(z^2+9\right)\left(z+1\right)}dz$ כאשר $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$



נסמן $f(z)=\frac{\cos z+\sin z}{\left(z^2+9\right)\left(z+1\right)}$. המונה הוא סכום של sin ו- cos, ז״א סכום של שתי פונקציות גזירות על C דהיינו פונקציות שלמות.

המכנה הוא פונקציה פולינומיאלית, לכן פונקציה שלמה. המנה היא פונקציה גזירה בכל נקודה שבה המכנה לא מתאפס, כלומר f גזירה ב- $C\text{-}\{-3i,3i,-1\}$. הקבוצה הזאת היא תת-קבוצה פתוחה של C, לכן הפונקציה f היא פונקציה אנליטית ב- $C\text{-}\{-3i,3i,-1\}$. שלוש נקודות אי-אנליטיות נמצאות בתוך הלולאה (עקומת ג׳ורדן) הנתונה. נבנה שלושה גשרים על מנת להגדיר שלוש עקומות ג׳ורדן המרידות את הנקודות הנ״ל (ראה שרטוט).
מתקבל:

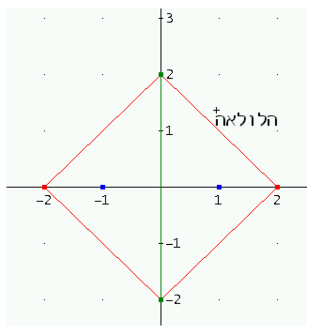
$$I=\oint_C \frac{\cos z+\sin z}{\left(z^2+9\right)\left(z+1\right)}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{\cos z+\sin z}{\left(z+3i\right)\left(z+1\right)}}{z-3i}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{\cos z+\sin z}{z^2+9}}{z+1}dz+\oint_{C_3}\frac{\dfrac{\cos z+\sin z}{\left(z-3i\right)\left(z+1\right)}}{z+3i}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{\cos z+\sin z}{\left(z+3i\right)\left(z+1\right)}\right|_{z=3i}+2\pi i\left.\frac{\cos z+\sin z}{z^2+9}\right|_{z=-1}+2\pi i\left.\frac{\cos z+\sin z}{\left(z-3i\right)\left(z+1\right)}\right|_{z=-3i}$$

$$=....$$

ה. $\oint_C \frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)}$ כאשר C הוא הריבוע שקודקודיו הם התמונות במישור גאוס של המספרים המרוכבים $2, 2i, -2, -2i$.



מוכיחים שיש שתי נקודות אי-האנליטיות בתוך הלולאה (עקומת ג׳ורדן).
בוחרים ״גשר״ (בירוק בשרטוט) המבדיל בין שתי הנקודות. נסמו ב- C_1 וב- C_2 את הלולאות המתקבלות משמאל ומימין בהתאמה. אזי:

$$\oint_C \frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)}=\oint_{C_1}\frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)}+\oint_{C_2}\frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)}=\oint_{C_1}\frac{\dfrac{1}{e^z\left(z-1\right)}}{z+1}dz+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{1}{e^z\left(z+1\right)}}{z-1}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{e^z\left(z-1\right)}\right|_{z=-1}+2\pi i\left.\frac{1}{e^z\left(z+1\right)}\right|_{z=1}=2\pi i\left(\frac{1}{-2e^{-1}}+\frac{1}{2e}\right)=\pi i\left(e^{-1}-e\right)=2\pi\sinh e^{-1}$$

רח׳ הוועד הלאומי 21, ת.ד. 16031, ירושלים 91160, מחלקת יחסי ציבור טל: 02-6751117, פקס: 02-6751190
21 Havaad Haleumi Street, POB 16031, Jerusalem 91160, ISRAEL, Tel: 972-2-6751117, Fax: 972-2-6751190