תרגיל מס' 1

פתור את המשוואה הבאה ב-C:

$$z^3-(4+5i)z^2-(1-12i)z+4-7i=0$$

(רמז: יש לפחות פתרון ממשי אחד)

- תחום דיון המשוואה: $\mathbb{C}$
- יהי $x\in\mathbb{R}$ הוא פתרון המשוואה אמ"מ $(x^3-4x^2-x+4)+i(-5x^2+12x-7)=0$

$$\begin{cases} x^3-4x^2-x+4=0 \\ -5x^2+12x-7=0 \end{cases}$$

למשוואה השניה שני פתרונות: 1 ו- $\frac{7}{5}$. רק 1 הוא גם פתרון של המשוואה הראשונה.

לכן הפתרון הממשי המבוקש הוא 1.

- נבצע חילוק ארוך של פולינומים. מקבלים:

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z^3-(4+5i)z^2-(1-12i)z+4-7i = (z-1)(z^2-(3+5i)z-4+7i)$$

נותר למצוא את שורשי הפולינום הריבועי הנ"ל:

$$\Delta=(3+5i)^2-4(-4+7i)=2i$$

השורשים הריבועיים של $2i$ הם $1+i$ ו- $-1-i$

לכן הפתרונות האחרים של המשוואה הנתונה הם:

$$z_1=\frac{3+5i+1+i}{2}=2+3i$$

$$z_2=\frac{3+5i-1-i}{2}=1+2i$$

<u>מסקנה</u>: למשוואה הנתונה שלושה פתרונות מרוכבים והם

$1,\ 2+3i,\ 1+2i$

<u>הערות:</u>

א) כאן 1 היה פתרון "בולט". היה אפשר לנחש.

ב) תחום הדיון חייב להיות ברור ומוגדר בהתחלה.

ג) הסימן $\sqrt{\ }$ שמור למספרים ממשיים חיוביים (או 0).

ד) לא להתבלבל בין Δ (הדיסקרימיננטה) ובין $\sqrt{\Delta}$, במידה ו- $\Delta\in\mathbb{R}^+$.

אם $\Delta\notin\mathbb{R}$, יש לרשום $\Delta^{1/2}$ ויש לזה שני ערכים. לדוגמא כאן:

$(2i)^{1/2}=\pm(1+i)$

תרגיל מס' 2

חשב את $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{5769}$ וכתוב את התוצאה בצורה אלגברית.

• נכתוב את $1-i\sqrt{3}$ בצורה קוטבית:

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

• עפ"י נוסחת דה-מואבר:

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{5769} = 2^{5769}\left(\cos(9615\pi)+i\sin(9615\pi)\right)$$
$$= 2^{5769}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$
$$= -2^{5769}.$$

הערה:

$$z = 1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

אם רוצים להשתמש ב-tan כדי למצוא את $\arg(z)$, יש לראות ש- $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, אבל זה לא דוקא את הארגומנט של z.

כיון ש- $\begin{cases} \mathrm{Re}(z)>0 \\ \mathrm{Im}(z)<0 \end{cases}$ המספר z נמצא ברביע ה-$\underline{IV}$,

לכן $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

תרגיל מס' 3

נניח שהפונקציה $f=u+iv$ אנליטית בתחום הפתוח D , כאשר u ו- v מסמנים שתי פונקציות ממשיות של המשתנים המששים x,y ו- $z=x+iy$. באלו תנאים $g=u-iv$ תהיה אנליטית ב-D ?

f אנליטית בתחום D, לכן
היא גזירה בכל נקודה של D ו- u,v מקיימות את משוואות קושי-רימן:

$$(I)\quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

על מנת ש- g תהיה אנליטית ב- D היא צריכה להיות גזירה ב- D
וחלקה הממשי וחלקה המדומה צריכים לקיים את משוואות קושי-רימן, דהיינו:

$$\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = -(-v_x) \end{cases}$$

כלומר
$$(II)\quad \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$$

מ- (I) ו- (II) ביחד נובע ש- $\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}$ בכל מקום

דהיינו u,v הן פונקציות קבועות, כלומר f היא פונקציה קבועה על D.

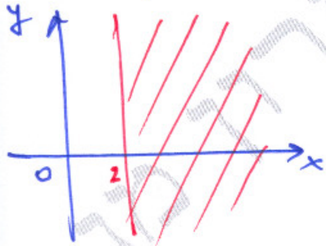
הערה: כאן נכון כאשר D תחום קשיר.
אם הוא לא קשיר, הכל נכון בכל קומפוננט קשיר של D
(על כל קומפוננט, המספר המרוכב α - $f(z)=\alpha$ יכול להיות שונה).

הערה: אין מעבר ישר מאנליטיות למשוואות קושי-רימן

תרגיל מס' 4

נתונה פונקציה f ע"י $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}(z)-2}$ כאשר $\mathrm{Re}(z)$ מסמן את החלק הממשי של המספר המרוכב z וסימן השורש לא מסמן פונקציה רב-ערכית. מצא את התחום של הפונקציה הזאת וקבע (עם הוכחה) אם הוא חסום או לא, ואם הוא פתוח או לא.

$f(z)$ מוגדר כאשר $Re(z)-2\geq 0$. אי-השוויון הזה מתאר חצי-מישור שפתו היא הישר בעל המשוואה $x=2$ (החלק המקווקו בשרטוט הבא).



א. התחום הזה הוא סגור. בשביל זה מראים שהמשלים הוא פתוח.
נקח $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש- $Re(z_0)<2$;
אם $\varepsilon=\frac{1}{2}(2-Re(z_0))$, אזי הכדור $B(z_0,\varepsilon)$ מוכל בקבוצה המשלימה: (*)
של התחום של f. מש"ל.

ב. התחום הנ"ל לא חסום:
נקח כדור $B(0,R)$ כאשר $R>0$ נתון.
אזי המספר המורכב $R+1$ נמצא בתחום הפונקציה f, אבל לא בכדור.

הערה: בעקרון השורה (*) טעונה הוכחה.