פתרון תרגיל 10 ב' בדף מס' 02

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+1=0 \qquad (*)$$

1) קבוצת הפתרונות המשוואה $\mathbb{C}-\{-1\}$.

2) נגדיר $t=\frac{z-1}{z+1}$ ונפתור את המשוואה $t^3+t^2+t+1=0$ $(**)$

דרך א': נמצא פתרון בולט ונחלק ב- $t+1$. נמצאים את אלף שאולי של $(**)$

אפשרות כלשהי כאן נניח ז"א.

$$(**) \iff (t+1)(t^2+1)=0 \iff (t+1)(t+i)(t-i)=0$$

לכן הפתרונות של $(**)$ הם: $-1, i, -i$.

כעת נרצה למצוא את הפתרונות של $(*)$:

$$\frac{z-1}{z+1}=-1 \iff z-1=-(z+1) \iff 2z=0 \iff z=0$$

$$\frac{z-1}{z+1}=-i \iff z-1=-i(z+1) \iff z=-i$$

$$\frac{z-1}{z+1}=i \iff z-1=i(z+1) \iff z=i$$

אז f הפתרונות של $(*)$ הוא: $\{0, i, -i\}$.

דרך ב':

$$\forall t\in\mathbb{C},\ t^3+t^2+t+1=(t^3+t^2)+(t+1)$$

גם כאן כאן אפשרי

$$=t^2(t+1)+(t+1)$$

$$=(t^2+1)(t+1)$$

ומשלימים כמו בדרך א'.

דרך ג': יודעים ש- $\forall t\in\mathbb{C},\ (t-1)(t^3+t^2+t+1)=t^4-1$

פותרים את המשוואה $t^4-1=0$ כדי למצוא את השורשים

מסדר 4 של 1. השורשים הם $1, i, -1, -i$.

אחרי מציבים את הערכים של z המתאימים ל $i, -1, -i$ (1 הוא שורש

מיותר שנכנס בשלב הכפל בלבד).